UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

LA BOTELLA DE KLEIN: PROPIEDADES Y ASPECTOS METODOLÓGICOS UTILIZANDO MATERIAL DIDÁCTICO Y SOFTWARE.

ANDRÉS TRUJILLO ARIAS

Pereira, 31 de Octubre del 2017

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TÍTULO

LA BOTELLA DE KLEIN: PROPIEDADES Y ASPECTOS METODOLÓGICOS UTILIZANDO MATERIAL DIDÁCTICO Y SOFTWARE.

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO:
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

ANDRÉS TRUJILLO ARIAS

DIRECTOR DEL TRABAJO:
PEDRO PABLO CÁRDENAS ALZATE

PEREIRA, 31 DE OCTUBRE DEL 2017

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL DIRECTOR

PEREIRA, 31 DE OCTUBRE DEL 2017

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Siendo las matemáticas una ciencia exacta del conocimiento que vive su realidad a partir de procesos de abstracción que ante la mirada fría de personas ajenas a esta disciplina carecen de sentido lógico y aplicabilidad, surge la necesidad de realizar estudios acerca de cómo enseñar aspectos de esta disciplina, de manera que capte la mirada de personas ajenas y participes de la misma. Por tal razón para nosotros es esencial que en este trabajo se haga evidente para cualesquier persona, que una estructura matemática puede ser analizada en detalle a partir de diversas metodologías, que aunque aparenten estar aisladas del rigor que caracteriza esta disciplina, en realidad ayudan al desarrollo de comportamientos matemáticos. Así pues damos a entender que existe la necesidad de ambientar la enseñanza de las matemáticas, a partir de nuevas metodologías que permitan relacionar lo riguroso de la disciplina, con diversos aspectos lúdicos que garanticen el acercamiento de esta hacia las personas. Por tal razón aclaramos que el desarrollo de este estudio lo tomaremos como una oportunidad de buscar ese acercamiento que en reiteradas ocasiones suele ser tan difícil, siendo nuestra idea de trabajo, idear maneras diferentes de enseñar comportamientos, características y propiedades matemáticas, que se encuentran inmersas en alguna estructura matemática.

Para llevar a cabo lo anterior, en nuestro estudio utilizaremos dos cuerpos geométricos que reciben el nombre de Banda de Mobius y Botella de Klein. El primero de estos lo relacionaremos con diferentes maneras de representar la Botella de Klein, y siendo la botella el cuerpo central de nuestro estudio, debemos resaltar que de manera análoga utilizaremos procesos que describan las propiedades de la cinta para verificar las propiedades propias de nuestro cuerpo de estudio, la Botella de Klein. Así pues en nuestro trabajo realizaremos apreciaciones sobre los comportamientos que este objeto encierra desde un punto de vista didáctico, en el que se involucren todos los conceptos matemáticos que el propio nombre de esta estructura sugiere, aunque se debe aclarar, que estos serán trabajados de una manera no tan rigurosa, siendo este el punto de partida para pensar en que este trabajo se haga atractivo para todo público.

Capítulo 2

OBJETIVOS

2.1. Objetivo general

- Verificar por medio de materiales didácticos y proyecciones de software, las propiedades y el comportamiento de la Botella de Klein.

2.2. Objetivos específicos

- Comprobar por medio de cortes en la superficie de representaciones de la Botella de Klein, si los cuerpos que de esta se desprenden conservan las propiedades del objeto inicial.

- Utilizar proyecciones de software matemático para verificar si existen figuras geométricas que sometidas a deformaciones continuas, generan objetos geométricos con idénticas propiedades a las de una Botella Klein.

- Utilizar diferentes representaciones de la Botella de Klein para hacer evidente el encamamiento que genera la Cinta de Mobius.

- Evaluar los resultados obtenidos teniendo en cuenta las estrategias metodológicas aplicadas para el estudio de las propiedades y el comportamiento de la Botella de Klein.

Capítulo 3

MARCO CONCEPTUAL

El término topología se utiliza para identificar un área de la matemática que estudia la continuidad y otros conceptos originados a partir de ella. Trata de una especialización vinculada a las propiedades y características que poseen los cuerpos geométricos y que se mantienen sin alteraciones gracias a cambios continuos, con independencia de su tamaño o apariencia.

Cabe resaltar que las funciones continuas de la matemática son aquellas que en los puntos cercanos del dominio, experimentan pequeñas variaciones en los valores. A nivel gráfico, estas funciones suelen estar en condiciones de dibujarse sin necesidad de levantar el lápiz del papel, que se utiliza para trazar su grafo.

La topología, por lo tanto, es la especialización que hace foco en el estudio de las funciones continuas y los espacios topológicos. Esta disciplina trabaja con los objetos de distintas formas, siempre que no se interrumpa la mencionada continuidad. En palabras del lenguaje cotidiano, podría decirse que la topología tiene permitido doblar, estirar, retorcer o encoger los elementos, pero sin quebrarlos ni segmentar aquello que esté unido ni pegar lo que esté separado. Por tal razón, a nivel topológico, un triángulo es lo mismo que una circunferencia (uno puede ser transformado en el otro de manera continua, sin necesidad de cortar o pegar), mientras una circunferencia nunca puede ser transformada en un segmento, ya que dicha transformación requeriría de romper la continuidad de la figura.

Pensando en esta idea intuitiva de lo que es la topología, se debe resaltar una aplicación topológica denominada homeomorfismo, que se define como una aplicación entre espacios topológicos, generándose una función uno a uno continua (donde su inversa es continua), que cumple con la particularidad de conservar las propiedades propias de los espacios luego de encontrarse bajo la acción de esta aplicación. En este caso los dos espacios topológicos se dicen que son homeomorfos.

De modo intuitivo, el concepto de homeomorfismo refleja cómo dos espacios topológicos son los mismos vistos de otra manera: permitiendo estirar, doblar o cortar y pegar. Sin embargo, los criterios intuitivos de estirar, doblar, cortar y pegar, requieren de cierta práctica para aplicarlos correctamente. Así deformar un segmento de línea hasta un punto no está permitido, o contraer de manera continua un intervalo hasta un punto, es otro proceso topológico de deformación llamado homotopía.

Otro concepto topológico que encierra un criterio de deformaciones topológicas, es aquel que recibe el nombre de encamamiento o encaje, más propiamente, el encamamiento de un objeto que se encuentra inmerso en un espacio, y es llevado o transformado a otro, para generar una nueva estructura. Lo anterior sugiere aclarar que en matemáticas, un encaje o encamamiento es una instancia de alguna estructura matemática contenida dentro de otra instancia matemática, tal como puede ser un grupo que es un subgrupo de un grupo. Este se define según la categoría que estemos hablando, por eso podemos hablar de encajes topológicos, encajes algebraicos, encajes geométricos, entre otros más.

Luego de haber expuesto una idea muy superficial de lo que es la topología, y de algunas nociones de la misma tales como homeomorfismos, encamamientos o encajes, centraremos nuestro estudio en un extraordinario cuerpo geométrico llamado Botella de Klein. Este objeto tiene la particularidad de poseer en su estructura nociones topológicas como las descritas anteriormente, por tal motivo, nuestro foco de estudio estará centrado en las nociones de encamamiento u homeomorfismo, siendo necesario trabajar estos conceptos a partir de deformaciones en la botella. Cabe resaltar que las deformaciones que mencionamos anteriormente, serán representadas bajo la acción de materiales y software, tales como tela, foamy, proyecciones de youtube, entre otros, todo con la finalidad de hacer evidente el proceso de deformaciones continuas en las que se preservan las propiedades iniciales de un objeto, haciendo alusión en efecto, a las nociones topológicas de continuidad, encamamientos, homeomorfismos, entre otros. Cabe aclarar que debemos ser muy cuidadosos con el termino deformación, pues si lo que queremos es estudiar este objeto desde un punto de vista topológico, estas alteraciones jamás podrán ir en contra de la noción de continuidad, sugiriendo que las transformaciones que realicemos en la superficie de la Botella de Klein sean continuas en todo momento, es decir, que en ningún momento generemos rupturas en la superficie del objeto que sometamos a alteraciones. Por lo tanto podemos asegurar que si en algún momento de nuestro estudio las deformaciones que realicemos atentan contra el concepto de continuidad, nuestro objeto dejaría de ser la Botella de Klein, convirtiéndose este en un cuerpo diferente, ya que su estructura sería otra. Por tal motivo, si en algún momento debemos recurrir a deformaciones que atenten en contra de la noción descrita de continuidad, haremos saber al lector que en efecto utilizaremos este nuevo objeto como una representación de la Botella de Klein (más no como ella), todo con el fin de cumplir los objetivos que trazamos para nuestro estudio. Así pues, para verificar que la botella en efecto describe las nociones descritas anteriormente, lo primero que haremos será reconocer el cuerpo geométrico llamado Cinta o Banda de Mobius (cuerpo geométrico que verifica homeomorfismo, encamamiento o encajes, entre otras nociones topológicas; de las cuales acogeremos en esencia las nociones topológicas de encamamiento y continuidad bajo el criterio de deformaciones sobre una superficie), y a partir de este, realizaremos un estudio detallado de las características, comportamientos y propiedades que la Botella de Klein describe.

3.1. Cinta de mobius

Esta banda como también es conocida, puede construirse tomando una tira de papel rectangular y uniendo sus extremos luego de dar media vuelta (giro de 180°) a uno de ellos. Su superficie tiene una sola cara, un solo borde, tiene la propiedad de no ser orientable y de ser una superficie reglada[1]. Esta superficie fue descubierta inicialmente por el matemático August Ferdinand

[1]Una superficie reglada, en geometría, es la generada por una recta, denominada generatriz, al desplazarse sobre una curva o varias, denominadas directrices.

Mobius, y posteriormente, complementada por el matemático Johann Benedict Listing en el año 1858.

Las principales propiedades que la Cinta de Mobius describe, pueden resumirse en el listado que se muestra a continuación:

- Es un cuerpo geométrico que posee una sola cara.
- Es una estructura que posee un solo borde.
- Es un objeto no orientable.
- Si se corta una Cinta de Mobius a lo largo, se obtienen resultados diferentes, según dónde se efectúe el corte.

Cada una de estas propiedades tiene repercusiones inmediatas en nuestro estudio, pues son estas las que permitirán verificar las propiedades de la Botella de Klein, haciendo uso particular de la noción de encaje topológico producto de deformaciones que realicemos sobre una superficie.

Esta forma geométrica llamada Cinta de Mobius se utiliza frecuentemente como ejemplo en topología, ya que con este objeto, se hace fácil entender porque se dice que esta rama de las matemáticas estudia cuerpos geométricos en el que permanecen inalteradas sus propiedades, luego de realizar en ellos transformaciones continuas. Esta última descripción será sometida a estudio, cuando concentremos nuestra atención en las características de la Cinta de Mobius. Además, cabe agregar que topológicamente, la Banda de Mobius puede definirse como el cuadrado que se genera por el producto $[0, 1]$ X $[0, 1]$, que tiene sus aristas superior e inferior identificadas a partir de la topología cociente[2], bajo la siguiente la relación:

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ para } 0 \leq x \leq 1$$

[2] En matemáticas, la topología cociente consiste intuitivamente en crear una topología pegando ciertos puntos sobre otros, en un espacio dado, por medio de una relación de equivalencia bien definida, siendo el nuevo espacio generado, aquel que recibe el nombre de espacio cociente. Algunos ejemplos reconocidos para analizar este concepto, suelen ser el toro matemático o la Cinta de Mobius.

Ahora bien, observamos que en la descripción anterior se hace referencia a un cuadrado que se altera bajo la acción de un producto de la topología cociente. Pues bien, esta forma cuadrada será aquella que utilizaremos para generar nuestro objeto de estudio; la Botella de Klein. Para tal fin recurriremos a deformaciones o manipulaciones en la superficie de la estructura cuadrada[3] que se muestra a continuación.

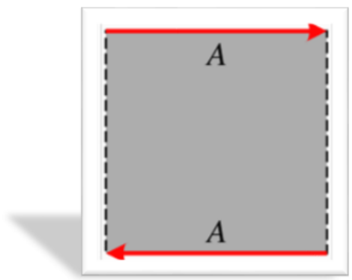

Figura 3.1: Forma cuadrada que se puede transformar en una Cinta de Mobius

Podemos notar cómo se hace referencia en el cuadrado para generar la Cinta de Mobius. Este a su vez recibe el nombre de polígono o cuadrilátero, y será el gestor principal en la construcción de la Botella de Klein. Por tal razón, se hace necesario centrar gran atención a la banda como herramienta vital para verificar las propiedades inmersas en nuestro objeto de estudio. Por último, resaltamos que la banda y botella son cuerpos análogos, pues en ambos casos encontraremos que no se distinguen caras interiores o exteriores a sus superficies.

Así pues, siendo banda y botella objetos análogos, verificaremos si en efecto la Cinta de Mobius es una superficie que genera encamamiento, más precisamente, si la banda es una instancia matemática que puede ser conservada en una nueva estructura matemática llamada Botella de Klein. Si esto es cierto, diríamos entonces que la cinta genera la botella, por tal razón, nos vemos en la obligación de estudiar análogamente ambos cuerpos en procura de verificar las propiedades de nuestro objeto geométrico de estudio. Por tal motivo iniciaremos nuestro estudio con una breve descripción del comportamiento, características y propiedades que encierra la botella.

[3]Figura extraída de la página web con dirección http://www.squaring.net/sq/sm/sm.html

Capítulo 4

REFERENTES TEÓRICOS

4.1. Algunas investigaciones en este campo

La serie de documentos, artículos e investigaciones que se relacionarán a continuación, son aquellas que a nuestro juicio involucran aspectos en común con el trabajo que hemos desarrollo, dando a entender que en estos escritos, se halla información valiosa que está estrictamente relacionada con los conceptos, metodologías y estructuras matemáticas que desenvuelven nuestro trabajo.

- Existe un artículo escrito por la doctora en matemáticas Martha Macho Stadler, quien actualmente labora como docente de geometría y topología, en la Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibersitatea. Dicho artículo se titula como "*La botella de Klein: Geometría palindrómica*", siendo este un artículo en el que se relacionan algunas propiedades que posee la Botella de Klein a partir del cuento "*Botella de Klein de Juan José Arreola*".

- En la Universidad Tecnológica de Pereira, se encuentra una investigación realizada en el año 2013 por los licenciados Andrés Trujillo Arias y Diana María Osorio Cardona, cuyo nombre titula "*Experiencia Topológica en grados cuarto, quinto y sexto, de la educación básica*". Dicha investigación trata sobre la aplicación de diversas actividades escolares que involucran nociones topológicas, como exterior, interior, frontera, continuidad, entre otras, y algunas estructuras matemáticas como lo son la Cinta de Mobius y la Botella de Klein.

- Existe un artículo publicado en el sitio web "*Tras la Cola de la Rata*", escrito por Juan Camilo Betancur, estudiante de Ingeniería Física de la Universidad Tecnológica de Pereira, cuyo nombre titula "*Una Botella sin interior*". En dicho artículo se puede encontrar una explicación del porqué siendo esta una superficie cerrada, no posee interior. Además podemos encontrar una buena explicación sobre cómo generar una Botella de Klein, a partir de la unión de dos Cintas de Mobius.

Capítulo 5

METODOLOGÍA DEL PROYECTO

Este estudio que realizamos acerca del comportamiento y propiedades de la Botella de Klein, forma parte de un macro proyecto en objetos con propiedades topológicas que se lidera en la universidad tecnológica de Pereira con el grupo de investigación GEDNOL, que cuenta bajo la supervisión y acompañamiento del Dr. Pedro Pablo Cárdenas Alzate. Por tal motivo en algunos momentos de nuestro estudio recurriremos a situaciones descritas para otros objetos que actualmente son foco de investigación de nuestro grupo de trabajo. Uno de estos objetos es conocido con el nombre de cinta o banda de Mobius, y es un componente esencial para la verificación de las propiedades y el comportamiento de nuestro cuerpo geométrico de estudio, con lo cual damos a entender que reiteradamente acudiremos a las características propias de este objeto, para recrear diversas maneras de hacer evidentes las características propias de la Botella de Klein.

Para llevar a cabo los objetivos trazados de este trabajo, acudiremos a la implementación de materiales manipulables tales como cartulina, plastilina, papel traslucido, vidrio, tela, e inclusive implementaremos entre otros, el uso de software que permita verificar visualmente comportamientos y características de la botella. También cabe resaltar que para nosotros es todo un reto trabajar este objeto que cuenta con una gran variedad de propiedades que se desprenden a partir de nociones matemáticas de la topología, ya que la idea radica en que al momento de hacer la lectura de este trabajo, este sea apto para todo público, es decir, nuestra labor consiste en generar un espacio en el que cualquier persona que se interese en conocer la Botella de Klein, pueda hacerlo a través de este escrito sin necesidad de omitir conceptos como los de orientabilidad, continuidad, entre otros más que forman el constructo teórico de nuestro cuerpo geométrico de estudio. Por tal motivo nuestro trabajo tendrá información matemática que será recreada para que personas con o sin formación en el estudio de las matemáticas, adquieran una idea de lo que es en realidad este objeto.

Nuestra metodología de trabajo no está vinculada al diseño de actividades que involucren acciones directas del lector para la adquisición de un concepto, propiedad o comportamiento de la botella, tampoco se regirá por la realización de encuestas o metodologías similares a trabajos de gabinete, redacción, revisión, sistematización, análisis de contenidos, por el contrario, nuestra metodología consiste en desglosar totalmente las características y comportamientos de la botella, dando a entender que bajo ninguna circunstancia pediremos a las personas que realicen manipulaciones o actividades para que por cuenta propia hagan evidente alguna propiedad como lo es por dar un ejemplo, la de ser un objeto que carece de borde en su superficie.

La descripción anterior sugiere que en este espacio el lector comprenderá los comportamientos, características y propiedades de la Botella de Klein sin necesidad de interactuar directamente con ella. Para esto en el trabajo se describirá porque se dice que la Botella de Klein es una superficie que posee una sola cara y un solo borde, porque es producto del encamamiento de la cinta o banda de Mobius, porque tiene la propiedad de ser un objeto no orientable, porque se encuentra inmersa en un espacio mayor al de tres dimensiones, para así finalmente obtener conclusiones acerca de este objeto.

Pues bien, para lograr todo lo que acabamos de mencionar trabajaremos con dos objetos similares en diseño pero diferentes en su estructura, donde ambos serán los pilares que fundamentarán nuestro estudio, a los cuales en su momento el lector hará su distinción bajo los nombres de Botella de Klein que se interseca a sí misma y Botella de Klein. Siendo estos cuerpos fundamentales para lograr los objetivos trazados inicialmente, es de esperar que todas las manipulaciones que hagamos en nuestro trabajo recaigan sobre estos, siendo más precisos, todo lo que esté relacionado con el uso de materiales como los descritos con anterioridad, serán utilizados directamente en las representaciones de ambas botellas para lograr identificar propiedades, comportamientos y características propias de estas. Por último se debe resaltar que cuando mencionamos en nuestra metodología el uso de software, haremos uso de material existe en internet, siendo nuestro toque de originalidad el encargado de hacer distinción entre algo que ya existe (proyecciones) y la manera en que lo usemos para dar explicación acerca de algún concepto, propiedad o comportamiento relacionado con la botella.

Capítulo 6

MARCO TEÓRICO

6.1. Botella de Klein

La Botella de Klein fue descrita por primera vez en 1882 por el matemático alemán Félix Klein. El nombre original del objeto no fue el de botella de Klein (en alemán Kleinsche Flasche), sino el de superficie de Klein (en alemán Kleinsche Fläche). El traductor de la primera referencia al objeto del alemán al inglés confundió las palabras. Como la apariencia de la representación tridimensional recuerda a una botella, casi nadie se dio cuenta del error.

En topología, una Botella de Klein es una superficie no orientable abierta cuya característica de Euler es igual a 0, es decir, no tiene interior ni exterior. Otros objetos no orientables relacionados son la banda de Mobius y el plano proyectivo real. Mientras que una Cinta de Mobius es una superficie con borde, una Botella de Klein no tiene borde. Tampoco lo tiene una esfera, aunque esta sí es orientable.

Ahora pensemos lo siguiente, ¿se puede construir una superficie cerrada que tenga una sola cara, en la que dentro y fuera signifiquen lo mismo? No es fácil de imaginar, pero se puede construir. Primero debemos construir un toro, que es el nombre matemático de un donut. Para esto debemos construir un cuadrado y plegarlo hasta obtener un cilindro. Luego lo estiramos pegando sus extremos hasta obtener la forma de un donut. Sin embargo, si cuando tenemos el cilindro, en lugar de estirar los extremos y pegarlos formando una rueda, introducimos uno de los extremos a través del propio cilindro, se obtiene una extraña superficie que se denomina Botella de Klein. (Realmente las gráficas de la Botella de Klein son representaciones en nuestro espacio tridimensional de un objeto que habría que imaginar en un espacio más complejo, donde la intersección al atravesar el tubo a sí mismo no se daría).

Veamos de manera detallada su construcción. Comenzamos con un cuadrado, y pegamos los bordes coloreados que se observan en la figura 6.1, de modo que las flechas coincidan. Más formalmente, la Botella de Klein es el cociente del cuadrado $[0, 1]$ X $[0, 1]$ con sus bordes identificados por la relación:

$$(0, y) \sim (1, y) \text{ para } 0 \leq x \leq 1, \text{ y } (x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ para } 0 \leq x \leq 1$$

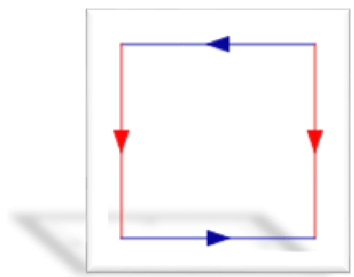

Figura 6.1: Polígono fundamental de la botella de Klein.

Como podemos observar en la figura[1], la descripción anterior asume la construcción de la botella con gran rigor matemático, dando a entender que de alguna manera, esta se puede generar mediante el cuadrado con el cual se hizo referencia a la construcción de la Cinta de Mobius, siendo el proceso de deformación de una superficie, la forma en que analizaremos dicha descripción. Ahora bien, como ambos cuerpos son análogos (cinta-botella), entonces este polígono que se constituye como el fundamental para la generación de nuestro objeto de estudio, debe ser deformado hasta adquirir la forma de la Botella de Klein, haciéndose necesario recordar, que bajo ninguna circunstancia las deformaciones que realicemos pueden ir en contra de la noción de continuidad. Si por alguna razón tratáramos de hacer visible nuestro objeto a partir de transformaciones que violenten la noción de continuidad descrita

[1]Figura extraída de la página web con dirección https://culturacientifica.com/2015/12/09/la-botella-de-klein-geometria-palindromica/

con anterioridad, el resultado no sería el deseado, pues al realizar las deformaciones requeridas en el cuadrado, generaríamos un cuerpo geométrico donde la intersección al atravesar el tubo a sí mismo se daría, o al menos eso creemos. Para clarificar esta descripción, resaltamos que si un objeto se interseca a sí mismo, esta genera rasgaduras, añadiduras o rupturas en su superficie, por tal motivo topológicamente el cuerpo geométrico sufriría alteraciones, convirtiéndose en un objeto diferente al inicial. Por tal razón la descripción que se hizo acerca de la construcción de la Botella de Klein resulta difícil de entender, puesto que en ella se encuentra inmersa la intersección de la superficie (no obstante, existe un modo de visualizar la Botella de Klein como una figura geométrica que no se auto interseca). Para hacer evidente la descripción anterior, debemos pegar las flechas rojas del polígono fundamental, (lados derecho e izquierdo) obteniendo un cilindro, a su vez, para pegar los extremos de manera que las flechas de los círculos coincidan, pasamos un extremo por el lado del cilindro. De inmediato observamos que esto genera auto intersección circular. En la siguiente figura[2], podemos visualizar en la parte resaltada en color rojo, a que hacemos referencia con el término intersecar (auto intersección circular).

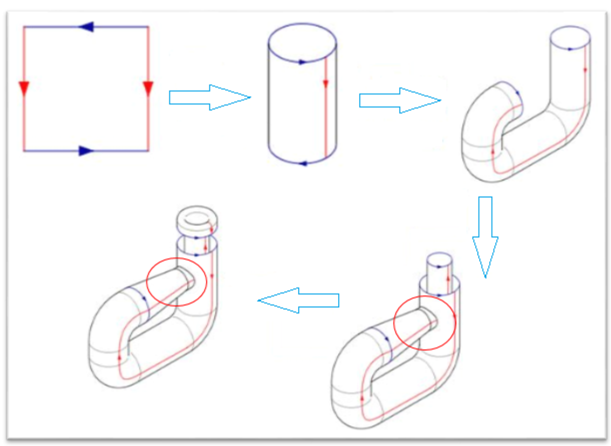

Figura 6.2: Inmersión de la Botella de Klein en tres dimensiones

Como el problema radica en la auto intersección que se genera en la superficie de la botella, debemos idear una manera de representar este objeto sin

[2]Figura extraída de la página web con dirección https://matematicascercanas.com/2016/08/20/botella-de-klein/

necesidad de generar el agujero que resaltamos en la figura 6.2. Para este fin debemos imaginar que empujamos suavemente un trozo de tubo que contiene dicha intersección fuera del espacio tridimensional original (siendo una analogía útil considerar una curva que se auto interseca en el plano; las intersecciones se pueden eliminar levantando una línea fuera del mismo). Dicha intersección contenida en un espacio diferente al de tres dimensiones, permite asegurar que la Botella de Klein es un cuerpo que se encuentra inmerso en un espacio diferente al tridimensional, por tal motivo, la inmersión de una nueva dimensión en la estructura y diseño de la Botella de Klein, resultará útil para verificar las propiedades y el comportamiento de la misma. A partir de esta inmersión, podremos estudiar si en efecto este cuerpo geométrico carece de borde, es no orientable, se encuentra inmerso en un espacio mayor al de tres dimensiones, es el resultado del encamamiento de la Banda de Mobius, es una superficie que no se interseca a sí misma, entre otras. Así pues, se hace necesario estudiar las propiedades de la Botella de Klein producto de su inmersión en el espacio de tres dimensiones, para posteriormente, realizar el estudio de la superficie que está inmersa en un espacio diferente al de tres dimensiones, es decir, el cuerpo geométrico que no se interseca a sí mismo. Para lograr tal fin iniciaremos nuestro estudio haciendo distinción entre una Botella de Klein que se interseca así misma y una que no lo hace.

6.2. Botella de Klein que se interseca a sí misma

Figura 6.3: Inmersión de la Botella de Klein en tres dimensiones

Se hace evidente que para generar este objeto[3] fue necesario hacer un orificio en la parte resaltada de la figura. A este tipo de objeto lo llamaremos Botella de Klein que se interseca a sí misma. Para comprender a que hacemos referencia con el término intersecar a sí misma, debemos centrar nuestro estudio en la sección resaltada en color rojo del objeto. Para tal fin acudiremos a diferentes maneras de representar este cuerpo, implementando el uso de materiales como papel, acetato, tela y proyecciones de software, que permitan asociar construcciones semejantes de esta botella.

Una de las maneras de generar una representación para este cuerpo geométrico es mediante el desarrollo de planos, los cuales pueden ser asociados, con la secuencia de figuras que se expone en la figura 6.2, donde estas a la vez, permiten su desarrollo a partir de deformaciones continuas que serán realizadas en el polígono fundamental de la Botella de Klein; siendo este el cuadrado descrito para la figura 6.1. Para dar inicio a la generación de dicha representación, lo primero que haremos será proyectar el polígono fundamental (cuadrado), para posteriormente someterlo a manipulaciones continuas. Para esto utilizaremos proyecciones del software utilizado en el video[4] de youtube titulado "*Topología, Botella de klein, banda de moebius*", como se muestra a continuación.

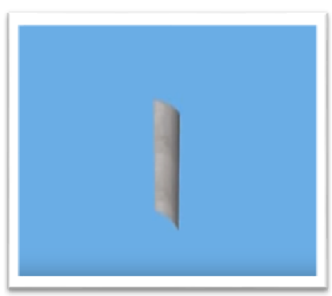

Figura 6.4: Polígono fundamental de la Botella de Klein

[3]Figura extraída de la página web con dirección http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/tag/botella-de-klein

[4]Video "*Topología, Botella de Klein, banda de Mobius*", extraído de youtube, publicado en el 2007 y con dirección web https://www.youtube.com/watch?v=BQayK3xtN-8.

Esta primera proyección del software utilizado en el video"*Topología, Botella de klein, banda de moebius*", permite visualizar el polígono fundamental de la Botella de Klein. A partir de este generaremos una representación para la botella que será llevada a cabo en el orden de las deformaciones planteadas en la secuencia de la figura 6.2, por lo tanto, la primera manipulación consiste en prolongar los extremos del cuadrado hasta que este logre adquirir forma cilíndrica (como se indica en dicha figura). Para tal fin, utilizaremos nuevamente proyecciones del software utilizado en el video de youtube "*Topología, Botella de Klein, banda de Mobius*", como se muestra a continuación.

Figura 6.5: Deformación del polígono fundamental de la Botella de Klein.

Luego de verificar que este polígono admite deformaciones, y que producto de estas adquiere forma cilíndrica, continuaremos con el orden de las manipulaciones planteadas en la figura 6.2. Para esto nuevamente deformaremos la superficie del cuadrado (polígono fundamental de la Botella de Klein), aplicando una especie de giro o curva en el extremo que se alarga. Para entender esta descripción, nuevamente utilizaremos proyecciones del software utilizado en el video "*Topología, Botella de Klein, banda de Mobius*" . Cabe aclarar, que la figura 6.2 está siendo representada a través de las proyecciones del video mencionado anteriormente, por tal razón, esa secuencia de figuras, debe ser expuesta en su totalidad (iniciando con un cuadrado que se deforma y terminando en la forma de representación para la botella inmersa en un espacio de tres dimensiones). Estas nuevas alteraciones se muestran a continuación.

Figura 6.6: Alargamiento, giro o curva, en un extremo de la forma cilíndrica.

Siguiendo con el orden de las alteraciones expuesto en la figura 6.2, podemos observar que este cuadrado poco a poco adquiere la forma deseada. Nuevamente el proceso consiste en realizar manipulaciones sobre la superficie del polígono, para lo cual utilizaremos nuevamente proyecciones del software utilizado en el video "*Topología, Botella de Klein, banda de Mobius*", como se muestra a continuación.

Figura 6.7: Deformación continua del polígono fundamental de la botella.

Hasta el momento, en las alteraciones que hemos expuesto sobre el polígono fundamental de la Botella de Klein, no ha sido necesario generar rupturas, añadiduras o cortes sobre su superficie, para generar una silueta similar a la de nuestro objeto de estudio. Como consecuencia, podemos asegurar que las deformaciones que se han realizado en el cuadrado, han respetado en todo momento la noción de continuidad, pues podríamos decir que de momento hemos estirado, dilatado, contraído, prolongado, entre otras, pero no hemos enmendando, añadido, rasgado o generado rupturas, a nivel de la superficie del polígono que se deforma. Así pues en consecuencia, desde un punto de vista topológico, el objeto de la última proyección de la figura 6.7, es exactamente el mismo que el expuesto en la figura 6.4 (cuadrado). Pues bien, al realizar más alteraciones en el objeto obtenido, nos veremos obligados a intersecar la superficie del mismo para generar la silueta de la Botella de Klein que se observa en la figura 6.2. Al igual que en las transformaciones anteriores, es el software utilizado en el video "*Topología, Botella de Klein, banda de Mobius*", la herramienta que permitirá visualizar que en dicha superficie se hace necesaria su intersección. Para comprender tal descripción, en la parte resaltada en color rojo de la figura 6.8, haremos evidente la sección de superficie del objeto que debe intersecarse a sí misma.

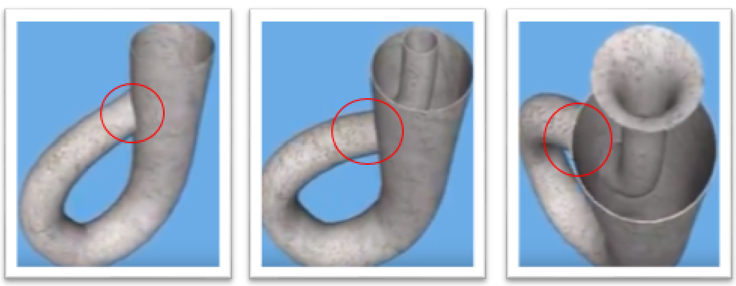

Figura 6.8: Sección de superficie que se interseca a sí misma.

Como observamos en la figura, la sección señalada en rojo hace evidente que en el proceso de generación de la silueta de la Botella de Klein, se hace necesaria la ruptura (agujerar) de su propia superficie, siendo esta una primera instancia que permite darnos una idea de la naturaleza de la botella que se auto interseca. Ahora bien, en este punto de las deformaciones podemos asegurar que violentamos la noción de continuidad planteada para nuestro estudio, es decir, las alteraciones que se realizaron en el objeto de la figura 6.8, permiten encontrar fisuras alrededor de su superficie debido a que este se agujera a sí misma, por tal motivo, se hace necesario aclarar que esta circunstancia convierte al cuadrado que estamos deformando, en un cuerpo topológicamente diferente. Así pues, podemos concluir que la silueta obtenida no es el resultado de transformaciones continuas que se realizan en el polígono fundamental de la Botella de Klein. Finalmente, damos por terminado el ciclo de deformaciones mediante el empalme de los extremos del cilindro que deformamos. Para observar el resultado final, proyectaremos nuevamente el software del video "*Topología, Botella de Klein, banda de Mobius*". La estructura que se obtiene es la siguiente.

Figura 6.9: Resultado final: Botella de Klein que se interseca a sí misma.

Este objeto geométrico que se generó a partir de un cuadrado, respetó en gran parte de las deformaciones realizadas la noción de continuidad, aunque como sabemos, para dar forma al resultado final se hizo necesario intersecar su superficie. Esta representación para el espacio de tres dimensiones, es aquella que recibe el nombre de Botella de Klein que se interseca a si misma. Ahora bien, la inmersión para la Botella de Klein en el espacio de tres dimensiones expuesta en la figura 6.2, no es más que el proceso de manipulaciones que hemos llevado a cabo sobre su polígono fundamental, dando entender que si esta inmersión puede ser representada por medio de dicha secuencia de figuras, entonces este objeto permite su construcción mediante el desarrollo de planos. Ahora bien, para esclarecer esta afirmación, a continuación construiremos una representación de la Botella de Klein que se auto interseca, en la que involucraremos la implementación de planos.

6.3. Construcción de una Botella de Klein que se interseca a sí misma

Como dijimos en el párrafo anterior, el esquema de deformaciones para el polígono fundamental de la Botella de klein que se expone en la figura 6.2, puede ser representado por medio del desarrollo de planos. Estos a su vez permitirán verificar que el objeto que con ellos se construye, es un cuerpo geométrico inmerso en un espacio de tres dimensiones. Para confirmar la descripción anterior, desarrollaremos los planos [5] que propone el *"libro topo-*

[5]Construcción extraída del libro "*topología desde la infancia"*, escrito por Julián Guzmán Baena , Fernando Mesa y Germán Correa Vélez, en el año 2010, lección 7, Botella de Klein.

logía desde la infancia", escrito por Julián Guzmán Baena, Fernando Mesa y Germán Correa Vélez, docentes de la Universidad Tecnológica de Pereira. El desarrollo de estos será expuesto a continuación y de manera similar a lo realizado con las proyecciones del video , la idea consiste en realizar la descripción de cada componente del plano. Aclaramos que en efecto ninguna de los componentes del plano obedece a una medida en especial, por lo tanto, se toma un parámetro de medida a, y a partir de este, se construyen cada una de sus partes.El primer componente del plano que se describe en dicho libro recibe el nombre de dentro. Este se muestra a continuación.

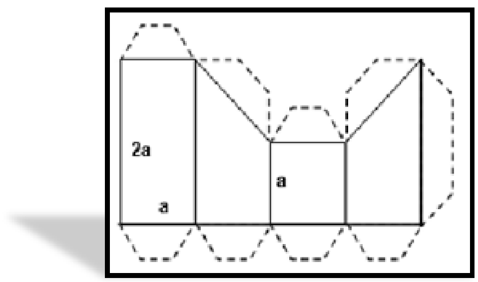

Figura 6.10: Componente *Dentro* del plano

Luego de construir el primer componente del desarrollo de los planos, realizaremos un nuevo elemento que se propone en el libro, este recibe el nombre de entrada. La figura 6.11 permite evidenciar como realizar su construcción.

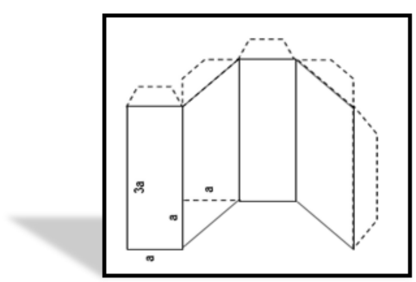

Figura 6.11: Componente *Entrada* del plano

Nuevamente proyectaremos un elemento perteneciente al desarrollo de los planos que se exponen en libro *"Topología desde la infancia"*. Este recibe el nombre de cuerpo y para realizar su construcción, debemos tener en cuenta que como estamos construyendo una manera de representar la Botella de Klein que se interseca a sí misma, esta debe evidenciar alguna sección de su superficie agujerada, más precisamente, lo que se pretende con este elemento es hacer evidente la ya mencionada auto intersección. Para esto observaremos la figura 6.12, prestando gran importación a la parte que se resalta en rojo.

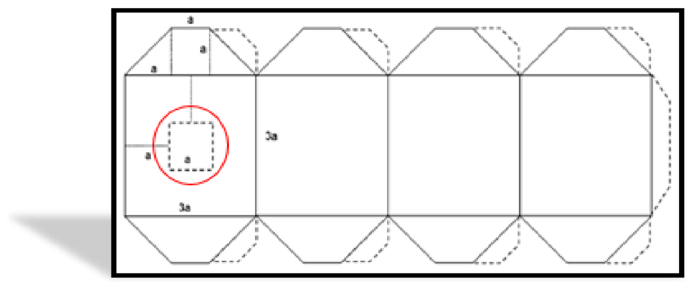

Figura 6.12: Componente *Cuerpo* del plano

Continuando con el desarrollo de los elementos del plano propuestos en dicho libro, diseñaremos el elemento que recibe el nombre de arriba. En la siguiente figura se hace evidente como generar su construcción.

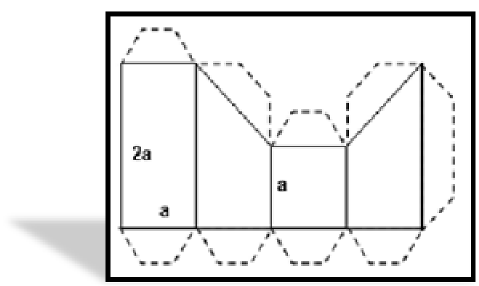

Figura 6.13: Componente *Arriba* del plano

En este punto del desarrollo de los elemento del plano descrito para la figura 6.2, quedan faltando tan solo dos componentes para poder generar el objeto deseado. Uno de estos dos elementos recibe el nombre de parte horizontal y se muestra a continuación.

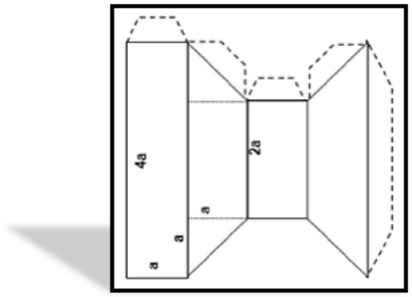

Figura 6.14: Componente *Horizontal* del plano

Finalmente, el último elemento que expone el libro *"Topología desde la infancia"* recibe el nombre de parte vertical. En la figura 6.15 podemos visualizar como construirlo.

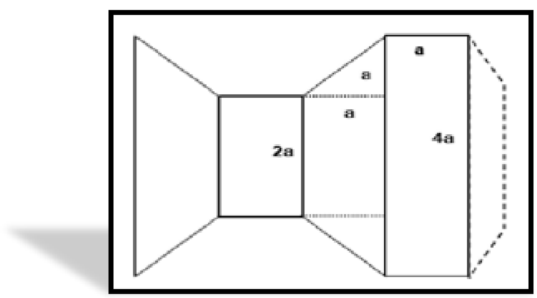

Figura 6.15: Componente *Vertical* del plano

Luego de hacer evidente los elementos del plano que permitirán diseñar una representación de la Botella de Klein que se interseca a sí misma, pasaremos a realizar su construcción. Para tal fin utilizaremos acetato, y en nuestro caso, el parámetro de medida a del que se habló anteriormente, corresponderá a una medida de 10 cm. A continuación haremos evidente el resultado de la manipulación de los planos implementado el material plástico acetato.

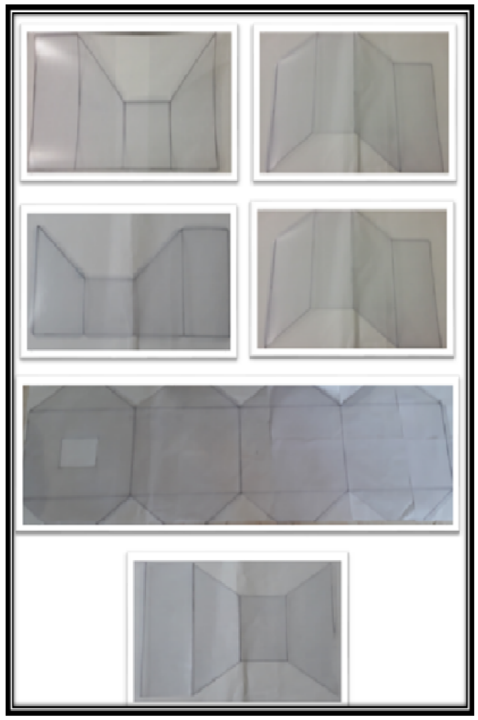

Figura 6.16: Construcción en acetato de los elementos del plano

Luego de construir todos los componentes del plano que se describe en el libro *"Topología desde la infancia"*, construiremos la botella mencionada. Para esto nos apoyararemos de la descripción que se hace en dicho libro acerca de la manera de unir cada uno de los elementos que diseñamos. Los pasos a seguir son los siguientes:

- *Diseñado el elemento dentro, unir sus bordes izquierdo y derecho.*
- *Diseñado el elemento entrada, unir sus bordes superior e inferior para luego unir esta parte 2 con la parte 1.*
- *Diseñado el elemento cuerpo, se debe introducir por su cuadrado de lado a las partes 1 y 2 ya unidas. Luego se unen sus bordes izquierdo y derecho, y por último, se unen las pestañas de la base inferior. De esa unión surge un orificio cuadrado de lado*a*, por donde se introducen las pestañas de la base inferior de la parte 1 (dentro), y se pegan en*

el borde de dicho orificio. Por último se unen las pestañas de la parte superior (de esa unión surge un orificio cuadrado de lado a*).*

- *Diseñado el elemento arriba, de este se unen los bordes izquierdo y derecho, para luego pegar las pestañas de su base inferior en el borde del orificio cuadrado del lado* a*, que se forma en la base superior del elemento cuerpo.*
- *Diseñado el elemento horizontal, se unen sus bordes inferior y superior, luego este se pega a la parte 4* (arriba).
- *Diseñado el elemento vertical, se unen sus bordes izquierdo y derecho, y luego esto se pega a las partes 5 y 2, obteniéndose la Botella de Klein.*

Luego de terminar con las uniones de los planos de acetato que describimos anteriormente, obtenemos la estructura que mostramos a continuación.

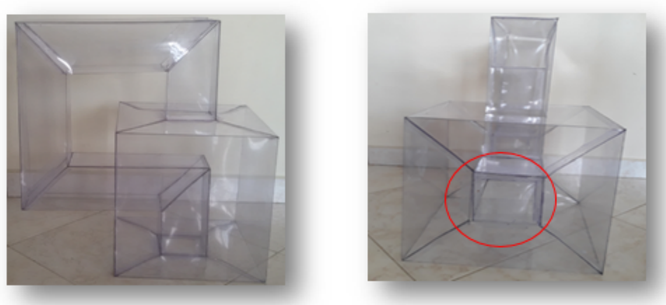

Figura 6.17: Representación de una Botella de Klein que se interseca.

Como se observa en la figura, este objeto presenta un orificio en su superficie que genera un punto común para entrar y salir de él (sección señalada en rojo). Si hacemos una comparación entre este cuerpo y el que describe la figura 6.3 (botella soplada en vidrio), encontraremos grandes similitudes, pues ambos cuerpos presentan la descripción inmediatamente anterior y su única diferencia radica en el material que utilizamos para sus construcciones (acetato-vidrio), o al menos así aparenta ser. Si la idea es ver este cuerpo como la Botella de Klein que se interseca a si misma, entonces existe la necesidad de realizar procesos análogos entre el objeto de acetato y el de vidrio, con el fin de esclarecer si dicha estructura adquiere o no el comportamiento de la botella. En caso tal que esta acoja un comportamiento diferente a la botella de vidrio, podremos asegurar que el diseño y desarrollo de estos planos no generan la botella que se interseca a sí misma, siendo consecuencia, desmentir la información que brinda el libro del cual fue extraída esta forma de representación. Cabe aclarar que este objeto construido en acetato lo utilizaremos cuando realicemos el estudio de las propiedades de la Botella de Klein, dando a entender, que este objeto será de vital importancia para comprender las propiedades de nuestro cuerpo de estudio.

Hasta el momento todo lo descrito acerca de este objeto nos ha llevado a representar de diferentes maneras la mencionada auto intersección. En adelante hablaremos de la Botella de Klein como una estructura en la que no existen rupturas o similares en su superficie. Para esto nos apoyaremos de las diferentes maneras que existen de representar dicha estructura en el espacio de tres dimensiones, asumiendo esta como si fuese una estructura que no presenta dicha auto intersección, todo con la finalidad de hacer evidente su comportamiento, para posteriormente, realizar un paralelo con el cuerpo geométrico que no se interseca. A continuación estudiaremos el comportamiento y la manera de visualizar una verdadera Botella de Klein.

6.4. Botella de Klein que no se interseca

Esta botella es el producto de deformaciones continuas que se realizan en la superficie de la Cinta de Mobius, en consecuencia, podemos asegurar que en este objeto no se generan cortes, intercepciones y demás conceptos, que vayan en contra de la noción topológica de continuidad que describimos para nuestro estudio. A continuación analizaremos el comportamiento y propiedades de este cuerpo. Lo primero que haremos será verificar visualmente que en efecto una Botella de Klein se genera a partir de deformaciones en una Cinta de Mobius. Para este fin proyectaremos la silueta de una banda que será sometida a alteraciones utilizando nuevamente proyecciones del software utilizado en el vídeo[6] de youtube titulado *“Topología, Botella de Klein, Banda de Mobius”*

[6]Resaltamos que las proyecciones de software utilizadas desde la figura 6.18 hasta la 6.21, fueron extraídas del vídeo de youtube titulado *“Topología, Botella de Klein, Banda de Mobius”*

Figura 6.18: Proyección de la silueta de una Cinta de Mobius.

El objeto geométrico que observamos se deformará hasta lograr la forma deseada. De nuevo el proceso consiste en alterar continuamente el cuerpo, aunque esta vez el propósito será hacer evidente la necesidad que existe de generar el encamamiento de la banda en la botella. Por tal motivo debemos ser precisos en que en estas manipulaciones bajo ninguna circunstancia haremos rupturas, añadiduras, cortes y demás conceptos, que violenten la noción topológica de continuidad. Las primeras alteraciones que se realizan en la superficie de esta cinta se hacen evidentes en la figura 6.19.

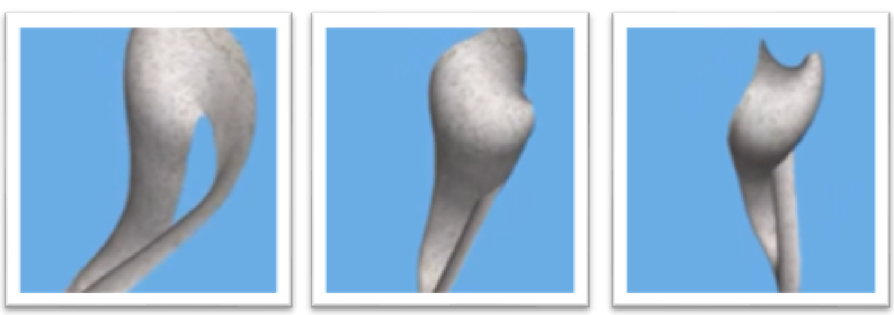

Figura 6.19: Cinta de Mobius sometida primeras deformaciones.

A partir de este momento debemos retomar las descripciones anteriores sobre la idea de superficie que se interseca a sí misma. Observemos detalladamente la figura 6.20, centrando toda nuestra atención en la sección de superficie resaltada en color rojo.

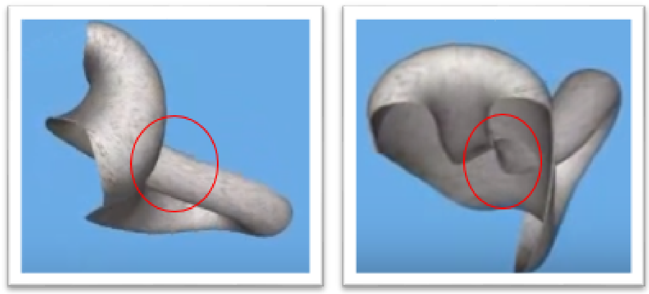

Figura 6.20: Encamamiento de la Cinta de Mobius en la Botella de Klein.

Con la figura podemos debatir acerca del concepto de encamamiento. Para efectos de nuestro estudio, diremos que esta noción consiste en añadir una nueva dimensión al espacio que conforma un cuerpo geométrico, siendo esta necesaria precisamente para que la sección señalada de la superficie que deformamos, adquiera la silueta de la Botella de Klein sin presentar auto intersección. Este es nuestro punto de partida para entender la diferencia entre el objeto que llamamos Botella de Klein que se interseca a sí misma y aquel al que llamamos Botella de Klein; este aspecto lo analizaremos en detalle más adelante. Ahora el paso a seguir es continuar con el orden de las alteraciones del cuerpo geométrico. Estas deformaciones se muestran a continuación.

Figura 6.21: Resultado final de las deformaciones.

Lo primero que debemos entender es que estas proyecciones que se hacen utilizando el software del vídeo, son representaciones que se hacen en el espacio de tres dimensiones para un cuerpo que está inmerso en un espacio mayor a este. Ahora bien, con la figura anterior verificamos que en efecto la Cinta de Mobius se encama en la Botella de Klein, siendo más precisos, podemos asegurar que para generar nuestro cuerpo geométrico de estudio necesitamos que la banda encajara en una nueva instancia. Esta noción podemos entenderla como la necesidad de generar una nueva dimensión, en el momento en que la superficie de la banda que se deforma atraviesa la misma (sección señala en rojo de la figura 6.20). Para esto debemos asimilar que si añadimos una nueva dimensión en la estructura de este cuerpo, esta evitará generar cortes con su propia superficie, trascendiéndolo a un espacio mayor al que se encontraba y generando como consecuencia, un cuerpo geométrico que escapa de nuestra visualización y que se genera sin necesidad de auto intersecarse.

Cuando decimos que este objeto escapa a nuestra visualización, nos referimos a que somos capaces de observar y describir todo aquello que preserve las características del espacio de tres dimensiones (un ancho, un largo y una profundidad), por tal motivo cuando hablamos de la Botella de Klein, solo queda imaginar cual sería el resultado de aumentar una nueva dimensión sobre su superficie, puesto que si el cuerpo que se interseca (botella) se encuentra inmerso en el espacio de tres dimensiones, entonces este que es producto del encamamiento de la banda, debe estar inmerso en un espacio diferente al que conocemos. Por tal razón de ahora en adelante, cada que hagamos referencia al encamamiento, nos estamos refiriendo a esa nueva dimensión que se hizo necesaria en la banda, para obtener como resultado esa representación de la figura 6.3, entendiéndose esta, como un cuerpo que escapa de cortes, rupturas o similares en su superficie.

Como nuestro estudio consiste en analizar el comportamiento y las propiedades de la Botella de Klein, y para nosotros se hace imposible diseñar una estructura que podamos percibir con estas condiciones (espacio mayor al de tres dimensiones), en adelante trataremos la representación que se hace en la figura 6.21 (que se refleja en la botella que fue soplada en vidrio y la construida en acetato), como aquella superficie que no se interseca a sí misma, producto del encamamiento que genera la Cinta de Mobius. Por tal motivo para efectos de nuestro estudio, acogeremos ambas representaciones como si fuesen la verdadera Botella de Klein, siendo estos a la vez, los cuerpos geométricos que nos permitirán verificar las propiedades que describe nuestro cuerpo geométrico de estudio.

6.5. Encamamiento de la banda en la Botella de Klein

Una manera de verificar que una Botella de Klein se obtiene como el resultado del encamamiento de la Cinta de Mobius, es realizando cortes en su superficie. Para esclarecer esta afirmación, nos apoyaremos de la información que brinda el vídeo[7] de youtube titulado *"Cutting a Klein Bottle in Half-Numberphile"*. Para este fin utilizaremos la botella soplada en vidrio y analizaremos en detalle el proceso que se expone en la figura 6.22.

Figura 6.22: Corte sobre la superficie de una Botella de Klein de vidrio.

Como observamos, la idea consiste en dividir el objeto en dos partes y verificar si efectivamente la Botella de Klein es producto del encamamiento de la cinta. Si recordamos, anteriormente hicimos deformaciones sobre la superficie de la silueta de la banda para generar una representación de la Botella de Klein, pues bien, si estamos tratando el cuerpo de la figura 6.22 como tal (representación), es de esperar que ocurra un proceso similar al de las deformaciones que realizamos sobre la superficie de la banda, es decir, de alguna manera se debe hacer evidente que en esta botella soplada en vidrio se encuentre la Cinta de Mobius como consecuencia del encamamiento. Observemos el resultado que se obtiene luego de realizar dicho corte sobre su superficie.

[7]Resaltamos que las figuras 6.22 y 6.23 fueron extraídas de la información que brinda el vídeo de youtube *"Cutting a Klein Bottle in Half-Numberphile"*, que cuenta con dirección web https://www.youtube.com/watch?v=I3ZlhxaT_Ko

Figura 6.23: Resultado del corte en la superficie de la botella de vidrio.

Al culminar el corte sobre la superficie de la botella, encontramos que el resultado obtenido son dos cuerpos geométricos con características visuales idénticas. Es más, podemos observar que estos cuerpos poseen una estructura de diseño similar al de una Cinta de Mobius. En la parte resaltada en color rojo de la figura 6.23, observamos una pequeña alteración que impide hacer la precisión de que estos cuerpos sean exactamente dos bandas. Ahora bien, si realizamos manipulaciones como las que hemos realizado anteriormente, podemos deformar ambos objetos hasta que adopten la forma de dos Cintas de Mobius. Para aclarar cuál es nuestra pretensión, la idea sería manipular los dos cuerpos de vidrio en altas temperaturas hasta lograr que las secciones señaladas se transformen en las siluetas que exponemos en la figura 6.24. (figura extraída de la página web gettyimages).

Figura 6.24: Cintas de Mobius que no presentan alteraciones.

Como sabemos, es posible deformar vidrio en altas temperaturas para construir figuras. De hecho, nuestra representación de la Botella de Klein es un objeto construido en vidrio, que fue manipulado a altísimas temperaturas para adoptar esa forma, por tal razón, las dos estructuras expuestas en la figura 6.23 (resultados del corte), nuevamente podrían ser sometidas a deformaciones que realizadas adecuadamente, adoptarían la forma de los cuerpos de la figura 6.24. Ahora bien, como es difícil acceder a este proceso (manipulación del vidrio en altas temperaturas), realizaremos un paralelo entre estas formas de vidrio y una que simbolizara dichos cuerpos. Para esto diseñaremos cuerpos similares construidos en papel foamy liso como se muestran a continuación.

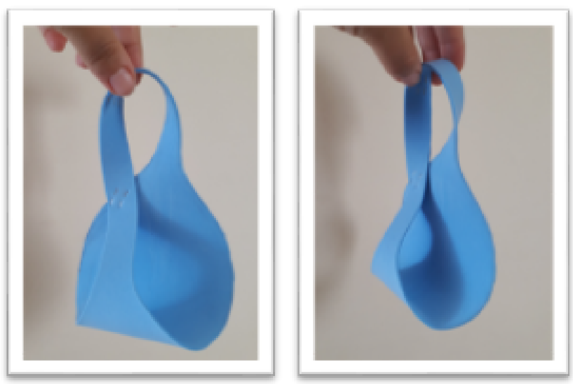

Figura 6.25: Representación en foamy del resultado del corte en la botella.

Ahora bien, como la idea consiste en deformar estas estructuras, y además debemos tener en cuenta que esta representación se diseñó con foamy, entonces la única forma de hacer evidente esta alteración sería cortando alguna sección de la superficie del objeto, con la finalidad de que este adquiera la forma de las dos bandas de la figura 6.24 (aclaramos que cortar cualquier sección de superficie de estos objetos, es un proceso que topológicamente atenta en contra de la noción de continuidad que hemos planteado desde el inicio de este trabajo, aunque para esta representación, resulta útil entenderla como la manera de deformar continuamente el foamy, dando a entender que en la estructura de vidrio no es necesario cortar la superficie, si no, manipular de forma tal que se hiciera evidente el resultado que buscamos sin necesidad de quitar porciones de vidrio de ella). A continuación hacemos evidente este corte.

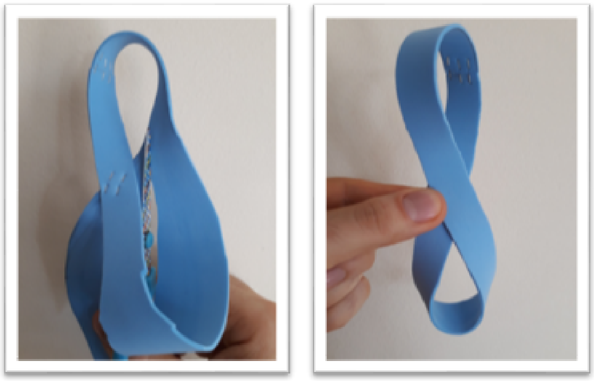

Figura 6.26: Resultado de la deformación realizada en el foamy.

A esto nos referimos con la deformación de los cuerpos geométricos que se generan luego del corte que se hizo en la botella, pues a partir de la manipulación continua en altas temperaturas de las secciones de superficie resaltadas en la figura 6.23, se lograrían obtener dos superficies idénticas en estructura y apariencia a la Cinta de Mobius. Así pues, con este proceso de deformaciones se haría evidente que la Botella de Klein se genera producto del encamamiento de la Cinta de Mobius, dicho de otra manera, nuestro objeto de estudio se puede generar con una o con dos bandas que se encajan en ella.

Si lo anterior es cierto, debe existir alguna manera de recrear la botella por medio de dos bandas que se entrelacen sin necesidad de generar añadiduras, enmendaduras o demás conceptos, que atenten contra la noción de continuidad que hemos expresado constantemente para este cuerpo geométrico. Para este fin, lo único que puede hacer posible dicho entrelazamiento es precisamente el encamamiento del que hablamos anteriormente. Por tal motivo, de nuevo asumiremos la representación para el espacio de tres dimensiones de la Botella de Klein, para visualizar que en efecto, esta se genera producto del encamamiento de dos cintas. La forma en que emprenderemos su construcción, será a través del diseño de una Botella de Klein construida en tela. Nuevamente debemos recalcar que este diseño no es nuestro objeto de estudio, aunque de nuevo asumiremos esta como una representación del objeto geométrico en el cual no se genera intersección alguna. Para este fin, diseñaremos dos bandas que verifiquen las propiedades de la Cinta de Mobius, teniendo en cuenta que en la construcción de esta superficie además de tela, utilizaremos cierres de cremallera; los cuales cumplirán la labor de representar el encamamiento que genera la banda en la botella, comportándose estos como aquella nueva dimensión mencionada anteriormente. Esto con la finalidad de entender la pretensión de los cortes en la botella soplada en vidrio. En la figura 6.27, podemos observar las telas que utilizaremos para recrear nuestra botella (para llevar a cabo esta descripción, nuevamente nos apoyaremos de las proyecciones que brinda el vídeo[8] de youtube *"Cutting a Klein Bottle in Half Numberphile"*).

Figura 6.27: Cintas de Mobius construidas con tela.

Si observamos en detalle los objetos de tela, encontraremos que estos toman la apariencia y el comportamiento de una Cinta de Mobius. Ahora bien, notamos que estos poseen el cierre que describimos anteriormente, siendo este precisamente el que utilizaremos para generar la unión de ambas bandas. Esta unión de las telas se comportará como la representación en nuestro espacio de tres dimensiones, de lo que hemos llamado con anterioridad el encamamiento de la banda en la botella. Observemos a continuación el proceso de la unión de bandas y la forma que estas adquieren.

[8]Las figuras 6.27 y 6.28, fueron extraídas de la información que brinda el vídeo *"Cutting a Klein Bottle in Half Numberphile"*, cuya dirección web es https://www.youtube.com/watch?v=I3ZlhxaT_Ko

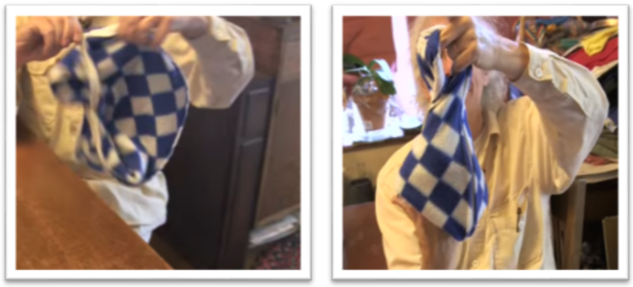

Figura 6.28: Unión de las cintas de Mobius utilizando los cierres de la tela.

De la figura podemos observar que la forma que adquieren estas bandas al ser entrelazadas, es la de la representación de la Botella de Klein para nuestro espacio de tres dimensiones. Esta situación nuevamente sugiere que es posible generar nuestro cuerpo geométrico de estudio a partir de dos bandas de Mobius. Ahora bien, sabemos que este objeto no es precisamente la Botella de Klein, aunque nuevamente insistimos en que es esta representación la que permitirá hacernos una idea de su comportamiento. Luego de aclarar esta situación, podemos ver que en efecto la botella se forma producto del encamamiento de la banda, siendo el cierre que se construyó con cremallera, el que toma el papel de la nueva dimensión que se hace necesaria para que no se produzca la intersección de la propia superficie, es más, haciendo visible por así decirlo, el encaje del que es producto la botella a través del broche que utilizamos para la tela.

Ahora bien, luego de recrear diferentes maneras de visualizar el diseño de nuestro cuerpo geométrico de estudio, podemos concluir que existen dos tipos de botellas. La primera de ellas la llamamos Botella de Klein que se interseca a sí misma, la cual tiene la particularidad de generarse a partir de la construcción y el desarrollo de planos o materiales, siendo una consecuencia inmediata que se encuentre inmersa en nuestro espacio de tres dimensiones. La segunda la llamamos Botella de Klein que no se interseca a sí misma, siendo su particularidad la de generarse a partir del encamamiento de la cinta de Mobius, y por lo tanto, encontrarse inmersa en un espacio diferente al de tres dimensiones.

6.6. Propiedades de la Cinta de Mobius

Como ya es claro que nuestro cuerpo geométrico de estudio es aquel que escapa de nuestra visualización e imaginación, y además que este es producto de la cinta de Mobius luego del encamamiento que esta genera hacia la botella, nos vemos en la obligación de realizar un estudio de las propiedades y el comportamiento de la banda. Esto con el fin de realizar un paralelo entre banda y botella, que nos permita reconocer las propiedades de nuestro cuerpo de estudio. Para esto recordemos que algunas de las propiedades que posee la Botella de Klein consisten en ser un objeto que no distingue de interior o exterior, un objeto que no tiene borde y un objeto no orientable. Para estudiar estas propiedades lo primero que haremos será diseñar una Cinta de Mobius, la cual construiremos utilizando una tira de papel en forma rectangular como se hace evidente en la siguiente figura.

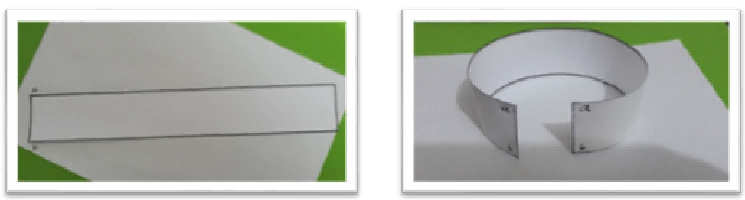

Figura 6.29: Tira de papel rectangular.

Vemos en la figura que la tira de papel rectangular empieza a tomar forma de cilindro. Si unimos los puntos a y b con el otro extremo de la superficie, efectivamente generaríamos un cilindro. Pues bien, la idea en esta construcción es generar un cuerpo diferente. Para diseñar ese objeto, realizaremos el medio giro sobre un extremo de la tira de papel que se indica en la figura 6.30.

Figura 6.30: Medio giro en una tira de papel uniendo sus extremos.

El objeto geométrico que obtenemos luego de unir los extremos de la tira de papel se conoce como Cinta de Mobius. Esta banda posee diversas propiedades, aunque para efectos de nuestro estudio, concentraremos nuestra atención en las siguientes: Es una superficie de una sola cara, posee un único borde, es no orientable y se encuentra inmersa en un espacio de tres dimensiones. Para verificar estas propiedades construiremos una banda en la que realizaremos cortes y recorridos sobre su superficie. La figura 6.31 permite verificar la construcción de este cuerpo.

Figura 6.31: Cinta de Mobius construida con papel.

Como necesitamos verificar las propiedades descritas anteriormente, lo primero que haremos será hacer evidente que este objeto posee una única cara, para tal fin, recorreremos la superficie de la cinta como se muestra a continuación.

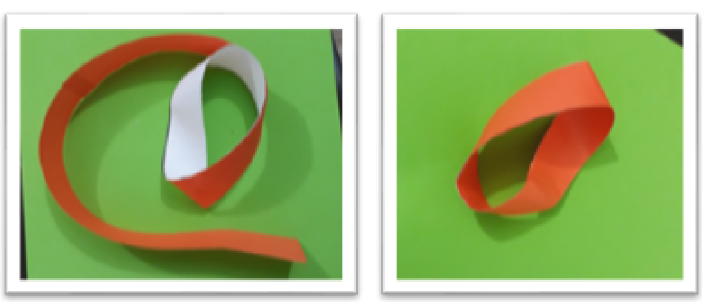

Figura 6.32: Delineando el recorrido a través de la superficie de la banda.

Como se hace evidente, cuando terminamos de delinear la superficie de la banda con la cinta de color anaranjado, comprobamos que efectivamente se logra recorrer la totalidad de su superficie. Esto sugiere que este cuerpo posee una sola cara. Para dar más claridad, este sería un objeto de dos caras, si al momento de encontrarnos con el punto de inicio del recorrido que hicimos con la cinta anaranjado, se hiciera evidente una cara sin delinear (sección de superficie en color blanco), y por supuesto, para nuestro objeto encontramos que al finalizar el recorrido sobre su superficie, es imposible identificar secciones de la misma sin demarcar con la cinta de color anaranjado.

Ahora bien, para hacer evidente que esta estructura posee un único borde, realizamos el mismo proceso a través de uno de los aparentes bordes que posee la banda, siendo estos, la sección de banda que quedó sin ser demarcada por la cinta de color anaranjado. Como en la figura anterior se hace difícil distinguir estos aparentes bordes, no queda otro remedio que diseñar con papel foamy una representación de lo que sería un zoom alrededor de la superficie de la banda, con el fin de estudiar el comportamiento de esta sección de la cinta. En la figura 6.33, hacemos evidente a que nos referimos.

Figura 6.33: Zoom sobre la superficie de la Cinta de Mobius.

Como se observa, al realizar la representación de este zoom encontramos una gran sección de la banda que denota un color blanco. Esta no forma parte de su superficie, sino que es parte de los aparentes bordes de este objeto. Esto lo podemos asegurar debido a que en la figura anterior, hicimos evidente que la banda que diseñamos fue cubierta en su totalidad con la cinta de color anaranjada, en consecuencia, esta franja demarca los mencionados bordes. Ahora bien, para verificar la cantidad de bordes que esta posee, realizaremos un nuevo recorrido sobre la superficie de color blanco utilizando un hilo de color verde. La descripción de este proceso se hace visible en la siguiente figura.

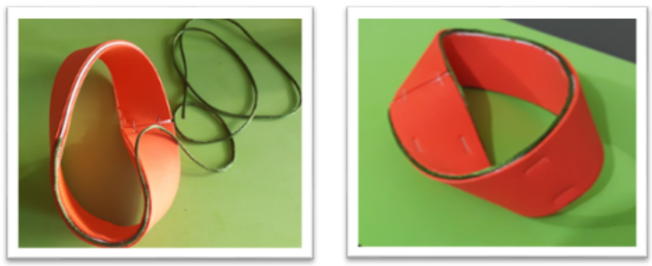

Figura 6.34: Recorriendo los aparentes bordes de la banda.

Es claro en la figura que logramos recorrer de manera continua, la totalidad de la sección de color blanco que demarcaba la banda luego de representar el zoom. Por lo tanto, aseguramos que en efecto este objeto posee un único borde en su estructura, pues no se distingue en el recorrido que hicimos sobre los aparentes bordes, secciones de color diferente al verde. Así pues, con estos recorridos que realizamos a través de la superficie y borde de la banda, podemos garantizar que este es un cuerpo que posee un único borde y una sola cara. Ahora bien, falta verificar que la cinta es un objeto que no distingue de orientabilidad, para posteriormente continuar con el análisis y estudio del comportamiento de la botella.

Para verificar la no orientabilidad de la banda proyectaremos su silueta en un espacio de tres dimensiones. Para esto utilizaremos una proyección de software[9] extraída del blog *"Pipe Nui"*, y representaremos el recorrido que se genera a través de su superficie como se muestra a continuación.

Figura 6.35: Recorriendo la superficie de la Cinta de Mobius.

[9]Figura extraída del blog *Pipe Nui*, publicado el jueves 20 de abril del año 2006, con dirección web http://pipenui.blogspot.com.co/2006/04/?m=1

De la figura podemos deducir que el recorrido que está realizando la persona que camina sobre la banda toma una magnitud infinita, es decir, la persona podría caminar infinitamente a través de la superficie de la cinta sin darse por enterada de que está pasando repetidamente por el mismo punto de la banda. Para entender esta situación pensemos en que la banda de la ilustración toma un tamaño bastante considerable en longitud, por dar un ejemplo unos 10 kilómetros, y que además conserva idénticas características durante todo el trayecto en su superficie, haciendo irreconocible el punto del cual se parte la travesía de su recorrido, aunque se parara por él en reiteradas ocasiones. Ahora bien, teniendo en cuenta esta descripción y detallando los puntos A y B que se resaltan en la figura, podríamos pensar en que la persona que camina sobre la banda jamás se daría por enterada que se encuentra exactamente en el lado opuesto de una sección de la banda que ya pisó, haciéndose irreconocible para ella, la falta de sentido de orientabilidad que existe en este cuerpo geométrico. Para entender a qué hacemos referencia, basta observar las diferentes posturas que la persona adquiere respecto a los aparentes bordes que posee la banda (aunque ya sabemos que esta solo posee un borde, haremos caso omiso a esta propiedad para comprender porque se dice que esta superficie es no orientable, por tal motivo en esta ocasión asociaremos la existencia de dos bordes para la banda), pues mientras el bastón de la persona en el punto A, apunta hacia el borde 1, el bastón de la persona en el punto B, apunta en la dirección opuesta del borde 1, sugiriendo que en esta estructura no existen distinciones de orientabilidad.

Para entender mejor la propiedad de ser no orientable que posee este cuerpo, construiremos una Cinta de Mobius con un material traslucido, y posteriormente, realizaremos el recorrido a través de su superficie con la finalidad de verificar la no orientabilidad de este objeto. Para este fin señalaremos el punto que da inicio al recorrido de la superficie de la banda, con una flecha de color verde que apunta en una dirección específica (hacia la flecha de color negro), para posteriormente con una flecha de color azul, indicar el inicio de la travesía sobre este objeto. Para dar claridad del proceso que deseamos llevar a cabo, en la figura 6.36 se hace evidente la descripción anterior.

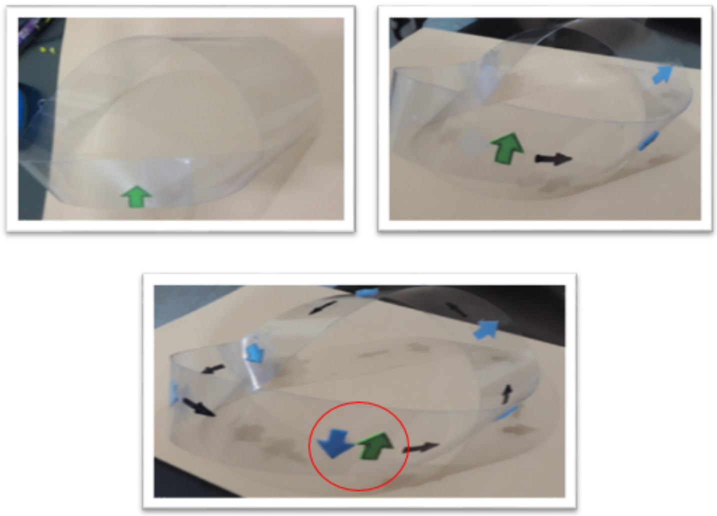

Figura 6.36: Recorriendo la superficie de la Cinta de Mobius traslucida.

Como se observa en la parte resaltada en color rojo de la figura, luego de dar inicio al recorrido sobre la superficie de la banda, llega un momento en cual las fechas se encuentran en uno de los puntos de respaldo de la superficie traslucida, es decir, podríamos pensar en que la fecha de color azul se encuentra en la misma posición que la de color verde, aunque se debe aclarar que una se encuentra en la posición de salida (flecha verde), mientras la otra se encuentra en el respaldo de esa posición (flecha azul). Ahora bien, es claro en la figura que estas flechas apuntan en direcciones diferentes cuando ambas se encuentran al respaldo de la otra, pues vemos claramente como en la parte resaltada de la imagen las dos flechas indican direcciones opuestas (flecha verde apuntando hacia la parte superior, flecha azul apuntando hacia la parte inferior), mientras que al momento de iniciar el recorrido, ambas apuntaban en direcciones idénticas.

Pues bien, es este el concepto de no orientabilidad que queremos presentar para la Cinta de Mobius y solo para aquellos curiosos que deseen comprender en que se diferencia de una superficie orientable, basta con imaginar el recorrido que se hace en el interior o exterior de una esfera, pues esta en ningún momento está sujeto a cambios de direcciones debido a que esta distingue caras, y en la banda el recorrido que se hace se genera sobre una única cara.

Cuando iniciamos el estudio de las propiedades y el comportamiento de nuestro cuerpo de estudio, hicimos la apreciación en que esta tenía dos formas diferentes de representación. Una de ellas la llamamos Botella de Klein y aseguramos que se encontraba inmersa para un espacio mayor al de tres dimensiones, aunque no se hizo ningún tipo de estudio de esta descripción. Pues bien, a continuación seguiremos aprovechando la construcción de la banda, para hacer visible porque esta botella se encuentra inmersa en un espacio diferente al de tres dimensiones. Para tal fin lo primero que haremos será cortar una cinta de Mobius como se muestra a continuación.

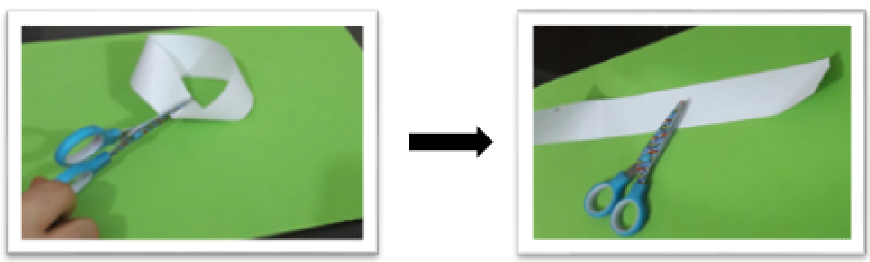

Figura 6.37: Corte sobre una banda de Mobius.

Como era de esperar, se observa que la banda luego del corte adopta una forma rectangular, además debemos recordar que para nuestro estudio, indicamos que no estaba permitido hacer cortes en una superficie, ya que estos atentan contra la definición que hemos expuesto de continuidad. Por tal motivo debemos aclarar que solo para efectos del estudio en el comportamiento de la estructura conocida como la Cinta de Mobius, nos permitiremos realizar dicho corte (proceso análogo al expuesto con los cortes que realizamos sobre el foamy), todo con el fin de posteriormente hacer evidentes propiedades de la botella. Pues bien, si acudimos un poco a la teoría de dimensiones encontramos que un rectángulo que se dibuja sobre un plano, está inmerso en un espacio de dos dimensiones pues este solo distingue de un ancho y un largo, esto siempre y cuando sea el dibujo que se hace sobre la superficie de un plano como lo es por ejemplo, el realizar la silueta de una figura geométrica con marcador sobre la superficie del pizarrón que los docentes utilizan para sus clases.

Si analizamos detalladamente la forma rectangular que la banda adopta luego del corte realizado, encontraremos que esta se encuentra inmersa en un espacio tres dimensiones (pues su silueta no está dibujada sobre un plano). La forma de verificar dicha afirmación sería realizando un proceso similar al realizado con el zoom en la banda, aunque esta vez, lo realizaremos sobre uno de los bordes de la tira de papel obtenida.

Figura 6.38: Zoom sobre los bordes de la tira de papel rectangular.

Este zoom que se hace sobre la tira rectangular de foamy, hace evidente que esta manifiesta las propiedades de un espacio de tres dimensiones. Para entender esta situación, realizaremos una comparación con una viga que soporta las cimentaciones de una casa, pues ambas describen en cada uno de sus vértices tres direcciones que conocemos con los nombres de ancho, largo y profundidad. Estas tres direcciones son aquellas que conforman el espacio tridimensional, y evidentemente se encuentran inmersas tanto en la viga que soporta una edificación, como en la tira de papel rectangular con la que hemos diseño nuestra Cinta de Mobius. En la figura 6.39 hacemos evidente este cuadro comparativo.

Figura 6.39: Comparativo entre una viga y la tira rectangular de foamy.

Pues bien, ya sabemos que la banda se logra generar a partir de esta tira de papel rectangular, y también que la tira tiene inmersa en su estructura tres dimensiones, por lo tanto, podemos garantizar que en el momento en que construimos una Cinta de Mobius con esta tira, esta conservará las tres dimensiones descritas. En consecuencia la banda es un cuerpo geométrico que está inmerso en nuestro espacio de tres dimensiones.

De momento logramos verificar que la Cinta de Mobius es un cuerpo geométrico que tiene las propiedades de ser no orientable, de poseer una sola cara, un único borde y de estar inmersa en un espacio de tres dimensiones. A continuación utilizaremos estas características para verificar que la Botella de Klein tiene comportamientos similares a los de la banda, consecuencia del encamamiento que la cinta genera en la botella.

6.7. Propiedades de la Botella de Klein

Luego de verificar las propiedades que posee la Cinta de Mobius, utilizaremos estas para estudiar las características y el comportamiento de nuestro de estudio. Lo primero que debemos tener en cuenta es que nuevamente utilizaremos el encamamiento del que ya hemos hablado con anterioridad, para generar nuestras conclusiones acerca de la Botella de Klein.

Como primera medida, debemos saber que se hace reiterado en Internet leer comentarios acerca de la botella tales como que es un cuerpo geométrico que posee una sola cara, por ende no tiene borde, ni distingue de interioridad o exterioridad, además de ser no orientable y de generarse producto de deformaciones continuas en la banda de Mobius. Pues bien, nuestra labor consiste en verificar de alguna manera estas mencionadas características que forman parte de nuestro objeto de estudio. Una de estas afirmaciones que se hacen en la red, la hicimos evidente luego de proyectar deformaciones continuas sobre la superficie de una cinta de Mobius que en consecuencia generaron la botella, siendo más precisos, nos referimos a que hicimos visible que en efecto es posible generar nuestro cuerpo geométrico de estudio a partir de una o dos bandas que se manipulan continuamente. Pues bien, a continuación verificaremos las demás afirmaciones que se hacen frecuentes en la red acerca de las propiedades de la Botella de Klein. Para esto utilizaremos nuevamente proyecciones de la botella y la representación en el espacio de tres dimensiones que hicimos con cierres y tela del encamamiento que genera la banda.

En este punto del escrito queremos hacer evidente que nuestro estudio realmente encierra conceptos matemáticos, y que estos han sido trabajados de maneras alternativas a las que usualmente se describen en trabajos de carácter matemático. Para tal fin citaremos dos definiciones [10] de la noción de orientabilidad que encierra la botella, y posteriormente retomaremos nuestra idea de trabajo que consiste en hacer evidente dichas propiedades utilizando materiales. Por tal motivo diremos que *"una superficie orientable puede definirse como una variedad orientable de dimensión dos, donde toda curva cerrada simple contenida tiene una vecindad regular homeomorfa a un cilindro abierto... En caso contrario, diremos que cualquier variedad de dimensión dos que no es orientable es una superficie no orientable, es decir, existe al menos una curva cerrada simple contenida que tiene una vecindad regular homeomorfa a la Cinta de Mobius..."*. Como se hace evidente, si quisiéramos desarrollar nuestro estudio con base a este tipo de definiciones, este escrito necesitaría de un gran rigor matemático lo cual escapa de nuestras pretensiones, por tal motivo una definición que se acomoda más a nuestra metodología de trabajo podría ser la siguiente: Diremos entonces que *"una superficie orientable cerrada, tiene la propiedad de dividir el espacio tridimensional (donde siempre pueden ser encajadas) en dos regiones diferentes y disjuntas: Una acotada por dicha superficie que es de volumen finito y otra no acotada exterior a dicho volumen"*. Esta propiedad la utilizaremos para distinguir las superficies orientables de las no orientables, ya que una superficie no orientable es aquella que no encierra nada en su interior. Por tal razón es imposible pensar en que las superficies no orientables dividan el espacio tridimensional, pues estas superficies no pueden ser encajadas en él.

Pues bien, de nuevo aclaramos que esta pequeña parte del escrito es solo para hacer evidente que la botella posee una verdadera estructura matemática, y que la manera de esclarecer por medio de esta definición que en efecto este

[10] Definiciones construidas a partir de los libros *Topología Munkres, Introducción a la Topología de Margalef Roig, J. y Outerelo Domínguez, E., Serie de compendios Schaum Teoría y problemas de Lipschutz y Curso de Topología General de Díaz, F. y García Calcines, J*

cuerpo es no orientable, consistiría en imaginar el encamamiento desde la botella hacia la banda, siendo precisos, imaginar si es posible que la botella se encaje en un espacio menor al que ella se encuentra inmersa. Pues bien, para esto necesitaríamos que la botella dividiera un espacio menor al que ella se encuentra, lo cual es imposible puesto que para lograr que esta adopte el comportamiento de un cuerpo que se encuentra inmerso en un espacio de tres dimensiones, necesitaríamos romper su superficie, dividiendo a esta en dos secciones que bajo ninguna circunstancia respetan la idea de encamamiento y continuidad expuesta con anterioridad. Por tal motivo de las definiciones anteriores, resultaría útil retomar la idea de que imposible pensar en que las superficies no orientables dividan el espacio tridimensional, pues estas no pueden ser encajadas en él. Así pues, este cuerpo debería ser no orientable. Para dar mayor claridad a la descripción anterior, haremos evidente la ruptura de la superficie de la Botella de Klein. Para esto utilizaremos en la figura 6.40, el software utilizado en el vídeo[11] de youtube titulado *"The Adventures of the Klein Bottle"*.

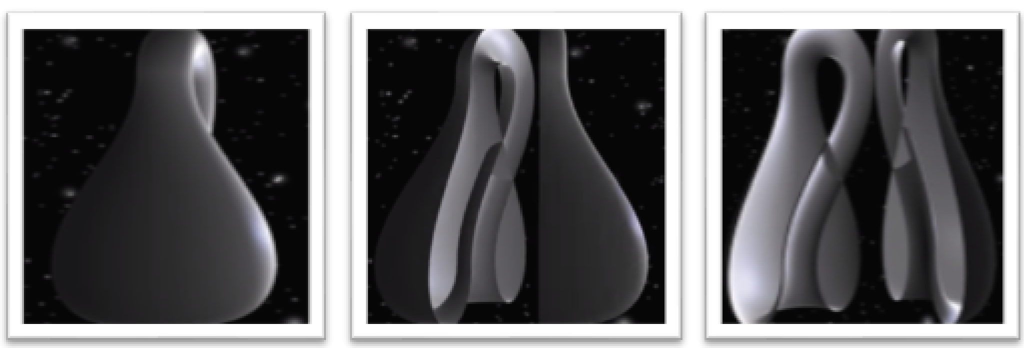

Figura 6.40: Corte sobre la superficie de una representación de la botella.

Para concluir acerca de esta propiedad, tendríamos que realizar un estudio riguroso del porqué esta estructura no divide el espacio de tres dimensiones, haciéndose necesario estudiar los objetos que se generan producto del corte en la superficie de la botella, a partir de la teoría de dimensiones, siendo este el camino para lograr concluir que en efecto esta superficie es no orientable. Como vemos, esta idea de trabajo escaparía de nuestros objetivos iniciales,

[11]Video *"The Adventures of the Klein Bottle"*, publicado en marzo 5 del año 2010, con dirección web https://www.youtube.com/watch?v=sRTKSzAOBr4

que hacen énfasis en mostrar esta inquietante estructura matemática, de la manera más amable posible, dando entender que la lectura de este escrito, sea apta para cualquier tipo de público. Por tal razón la verificación de esta propiedad (no orientabilidad) a partir de la información que nos brinda el libro de Munkres J. (Topología 2002), aunque sea de total confianza y por supuesto desarrollable desde diferentes marcos teóricos de las matemáticas, no será tenida en cuenta para el desarrollo de esta propiedad en este escrito. Así mismo podríamos pensar en que todas las demás características que describe este objeto, realmente están acompañadas de una fuerte estructura matemática (aunque en ellas no se trabaje con un fuerte rigor matemático).

Luego de hacer evidente que nuestro cuerpo geométrico de estudio posee una verdadera estructura matemática, retomaremos nuestra idea de hacer evidentes sus propiedades a partir de las características propias de la Cinta de Mobius.

Siendo la botella un cuerpo que se genera producto del encamamiento de la banda es de esperar que esta se comporte de manera similar a la cinta, o al menos, que su estructura derive de las propiedades que hicimos visibles con anterioridad para la banda. Por tal razón para verificar una de las primeras características del comportamiento de la botella, acudiremos a las figuras 6.27 y 6.28, en las cuales se hizo evidente que con la unión por medio de cierres de dos bandas construidas con tela, era posible generar una representación para nuestro espacio de tres dimensiones de la Botella de Klein. Pues bien, estas figuras sabemos que se utilizaron para darnos una idea de lo que es el encaje de la banda en la botella, además fue muy claro que cuando hicimos dicha representación, el producto final se obtuvo debido a que cerramos ambas bandas como si fuesen un solo objeto. Por tal motivo se debe recalcar en que si estas cintas se cerraron y sabemos que estas poseen un único borde, entonces la botella carecerá de este. Para ser más claros, observemos en detalle nuevamente la secuencia de software extraído del vídeo de youtube titulado *"The Adventures of the Klein Bottle"*, que se expone en la figura 6.41, y luego retomaremos la idea.

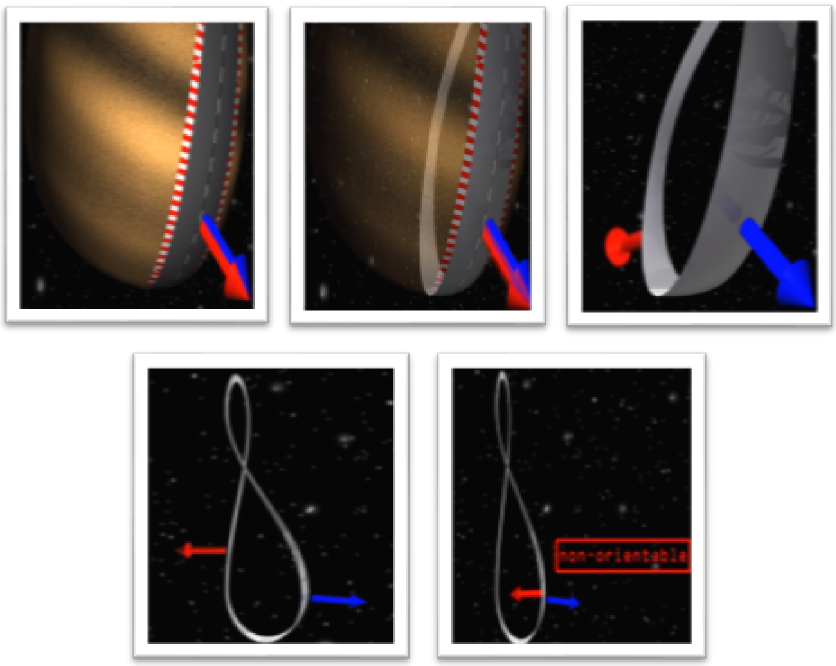

Figura 6.41: Estructura de la superficie de la Botella de Klein.

Como se observa, inicialmente se proyecta la silueta de lo que es la representación de la Botella de Klein para nuestro espacio de tres dimensiones, la cual poco a poco se diluye hasta obtener como resultado una banda que representa la superficie de nuestro cuerpo de estudio. Si quisiéramos encontrar algún borde sobre el resultado final (representación de la superficie de la botella), encontraríamos que esta posee un único borde ya que esta banda en realidad es una Cinta de Mobius. En la ultima figura de la secuencia encontramos que al realizar el recorrido sobre esta superficie, esta silueta se comporta como una objeto no orientable, pues sucede exactamente el proceso descrito con anterioridad para la cinta.

Retomando la idea, hicimos énfasis en que las bandas se cerraban y por lo tanto este nuevo cuerpo carecía de borde, pues bien, la primera figura de la secuencia proyecciones de la figura 6.41, muestra que en efecto es imposible encontrar algún borde para su superficie, pues al momento de recorrer la botella, toda la autopista que se demarca en la primera proyección con aparentes bordes de color rojo, se cerrará en una autopista de un único color que para nuestro caso es el anaranjado que diluimos para generar la secuencia. Pues bien, en esa primera figura de la secuencia se hace claro que es imposible encontrar algún borde sobre la superficie de la botella, es decir, se hace imposible encontrar ese color rojo que demarcaba los aparentes bordes que tenía la autopista (en caso de seguir expandiendo el color anaranjado y que este no se diluya), siendo este proceso análogo al que describe la idea de trabajar con las bandas de tela, pues sabemos que al momento de cerrar ambas para generar un solo objeto, los cierres que hacían el papel de los aparentes bordes de las bandas se perdieron en su totalidad, siendo más precisos, en ningún momento es posible encontrar rastro alguno de estos broches luego de cerrarlos (encamamiento), para generar la representación de la Botella de Klein en nuestro espacio de tres dimensiones. Siendo estas descripciones idénticas en comportamiento, aunque hayan sido trabajadas con materiales diferentes (tela-software), podemos asegurar que la Botella de Klein producto del encamamiento en sus representaciones, carece de bordes en su superficie.

Luego de verificar la falta de bordes en nuestro objeto de estudio, daremos paso a la comprobación de una nueva propiedad del mismo. Para este fin acogeremos que la Cinta de Mobius es una variedad no orientable, siendo este el motivo para resaltar de la figura 6.41, el momento en que el color anaranjado que genera la totalidad de la superficie de la botella comienza a diluirse hasta desaparecer. En el momento que este color desaparece, se hace evidente que lo que se demarca como la silueta de la superficie de la Botella de Klein, es una cinta de Mobius. Ahora bien, si la banda es un cuerpo que no distingue de orientabilidad, entonces cualquier recorrido que realicemos sobre la superficie de la botella tendrá que comportarse de esta manera (no orientabilidad), por tal razón, se hace evidente que en efecto la Botella de klein es un objeto no orientable (ver proyección final de la figura 6.41).

Una propiedad más que deseamos hacer evidente acerca de la botella, se genera consecuencia de la descripción anterior, pues si sabemos que la superficie de esta adquiere la forma, la estructura y el comportamiento de una cinta de Mobius, entonces es inmediato asegurar que la botella posee una única cara, pues la estructura de su superficie es en realidad una banda de Mobius y esta es una variedad que posee una única cara (lo cual verificamos con anterioridad).

Luego de verificar diversas propiedades que posee la botella, haremos evidente una ultima propiedad. Para esto consideraremos el recorrido que un objeto describe sobre la superficie de una representación de la Botella de Klein, apoyándonos del objeto construido con material traslucido que se expone en la figura 6.17 (botella de acetato), siendo nuestra idea, hacer evidente el comportamiento que la propia superficie adquiere respecto a los conceptos de interioridad y exterioridad. Por tal razón realizaremos diversos procesos de cortes y recorridos sobre su superficie, e introduciremos objetos dentro de su aparente interior. Además debemos recordar que esta manera de representación que acogemos de ahora en adelante, fue asumida como tal, sin realizar ninguna verificación acerca de su naturaleza y comportamiento, por lo tanto, a medida que trabajemos el concepto de interioridad y exterioridad, nos veremos en la obligación de esclarecer si esta es en verdad una forma que representa a la Botella de Klein, con el fin de lograr que los procesos que describamos sobre este objeto tengan validez en nuestro estudio.

Lo primero que haremos con esta representación es hacer evidente que esta posee puntos interiores, o que al menos aparenta tenerlos. Para esto realizaremos un cuadro comparativo entre el interior de un cubo traslucido y la botella, y a la vez, introduciremos pelotas de pimpon en las caras que simbolizan su interior como se observa a continuación.

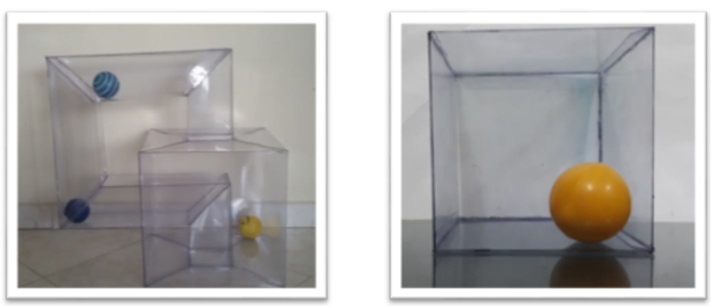

Figura 6.42: Pimpones en el aparente interior de las estructuras de aceto.

De la figura observamos como en efecto las dos estructuras aparentan poseer puntos interiores, pues se hace claro para ambas, que las pelotas de pimpon aparentan crear una clara distinción para los conceptos de interioridad y exterioridad. Ahora bien, si esto es cierto, entonces todo lo relacionado en Internet acerca de este cuerpo sería información errónea, por tal razón debemos ser cuidadosos con la forma de desarrollar esta afirmación. Así pues para esclarecer esta situación, debemos realizar procesos análogos a los descritos para la botella que fue soplada en vidrio, aunque en esta ocasión nuestro interés radica en verificar la existencia de puntos interiores o exteriores en dicha estructura.

Para desarrollar esta idea de interioridad, cubriremos la superficie de los cuerpos de acetato con pintura de color violeta. La idea consiste en sellar con este color toda la travesía sobre ambas superficies, es decir, cubrir en su totalidad la superficie de ambas estructuras, para finalmente comprender, si en realidad existen diferencias entre estos cuerpos, o por el contrario, si ambos se comportan de manera similar. En la siguiente figura observamos dicho proceso.

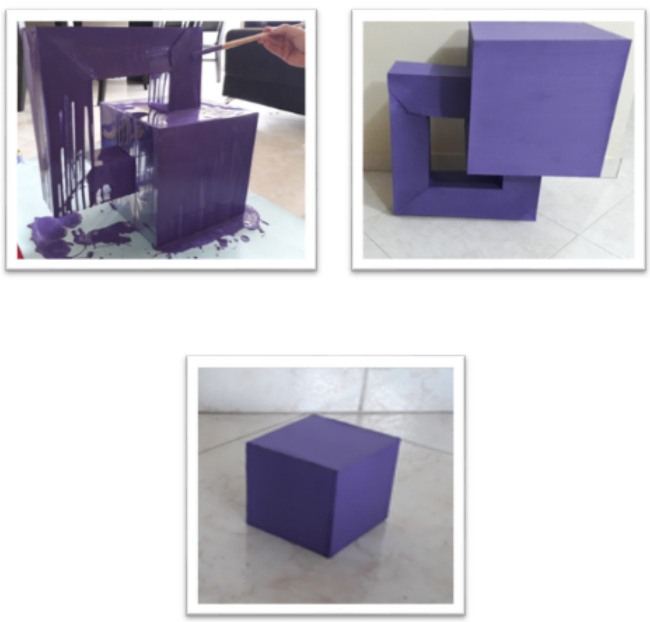

Figura 6.43: Cubriendo la superficie de las estructuras de acetato.

De la figura observamos que el color violeta se hace presente en la totalidad de la superficie de ambas estructuras. En este momento cualquier persona podría pensar que si los pimpones que se encontraban dentro de ambas estructuras desaparecen de la vista, es porque la pintura cubrió la cara externa de los objetos de acetato, dando a entender, que estos pimpones deben encontrarse en las caras internas y que además deben encontrarse sin rastro de pintura, debido a la protección que les ofrece la cara externa de ambas estructuras de acetato. Esta idea de razonar sería la mas coherente posible, dado que habitualmente esto es lo que sucede. Ahora bien, con el fin de esclarecer esta situación, existe la necesidad de realizar un corte sobre ambos cuerpos con la intensión de verificar si en realidad sucede esta descripción.

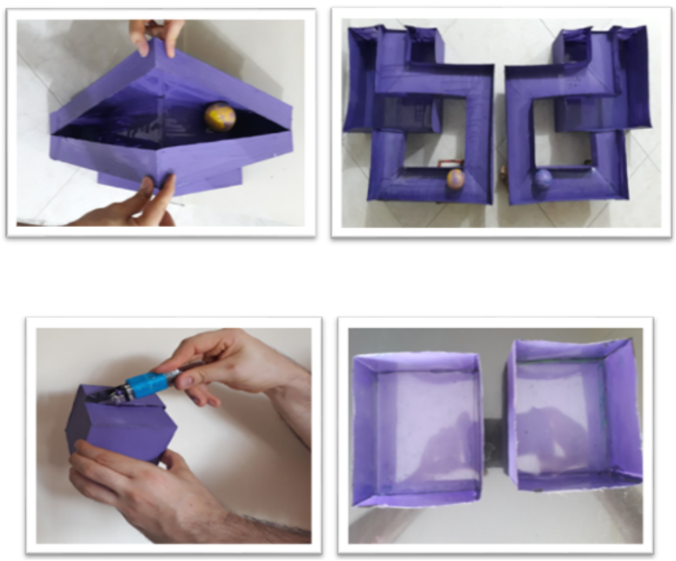

Figura 6.44: Cortes sobre los cuerpos de acetato (cubo y botella).

De la figura podemos observar que al terminar los cortes sobre ambos cuerpos de acetato, el pimpon que se encontraba en el interior del cubo conserva su color original, es decir, a pesar de que se cubrió con una gran cantidad de pintura de color violeta la cara traslucida del cubo de acetato, esta no logró permear la cara interior del objeto, dando a entender que en efecto, dicha estructura distingue de puntos interiores y exteriores a su superficie. Ahora bien, si detallamos el resultado final luego de realizar el corte sobre la superficie de la botella de acetato, encontramos que el resultado se torna diferente. Vemos que en este objeto las pelotas de pimpon se tornan con el color violeta que cubría la aparente cara exterior de esta estructura, con lo cual se hace evidente que la aparente cara exterior de esta superficie, en realidad no se comporta como tal. Ahora bien, si esta estructura no posee una cara exterior, como consecuencia podemos asegurar que tampoco posee puntos exteriores a su superficie, dando a entender que esta estructura no distingue de exterioridad.

Se dice del cubo que este es un cuerpo cerrado que distingue puntos interiores de exteriores, que como consecuencia, generan la distinción de exterioridad e interioridad descrita anteriormente, por otra parte, se dice que la Botella de Klein es una estructura no orientable abierta, que como consecuencia, anula la existencia de puntos interiores y exteriores a su superficie. Para comprender esta última descripción, utilizaremos los cuerpos obtenidos luego de culminar los cortes sobre los cuerpos de acetato, con el fin de verificar, si estos se comportan como una estructura cerrada (cubo) y como una estructura abierta (botella). Para esto utilizaremos thiner (disolvente) para remover los rastros de pintura sobre la superficie de la cara externa del cubo, y por supuesto, realizaremos el mismo proceso sobre la cara que pintamos de la superficie de la botella (que sabemos no es una cara externa).

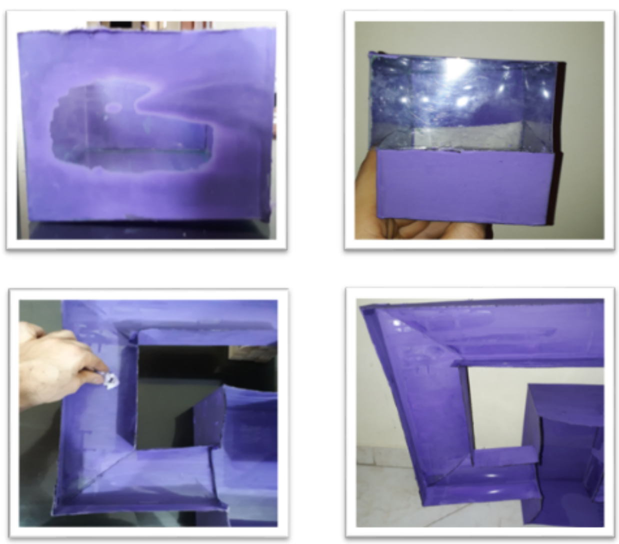

Figura 6.45: Removiendo la pintura de los cuerpos de acetato.

Es claro que al remover parte de la pintura que utilizamos para cubrir el cubo, nuevamente se evidencia que el material es traslucido, pues vemos con claridad a través de la sección de pintura removida, que al frente se encuentra la cara opuesta de esta sección de superficie. Esta descripción permite entender porque se dice que este es un objeto cerrado, ya que la pintura como aclaramos anteriormente, no forma parte de secciones diferentes a la cara externa. Ahora bien, cuando realizamos el proceso sobre la botella el resultado es diferente, pues observamos que al remover pintura de diferentes secciones de su superficie, esta no evidencia que el material sea traslucido, es decir, se hace imposible ver a través de su superficie alguna sección de la misma que se encuentre al frente de esta (como sucedió en el cubo), pues siempre encontraremos el rastro del color violeta en la cara opuesta a la superficie traslucida, con lo cual podemos concluir que este objeto es abierto. Ahora bien, siendo la Botella de Klein una estructura abierta que posee una sola cara, se hace inmediato concluir que esta no distingue de puntos exteriores ni interiores para su superficie, por lo tanto, queda por verificar que en efecto esta forma de representación que adoptamos para la Botella de Klein en realidad se comporte como tal. Para esto comprobaremos de manera análoga a procesos anteriores que las estructuras de acetato de color violeta, son dos bandas de Mobius, y de ser así, todo los descrito para el objeto de acetato tomaría validez. Observemos la siguiente figura.

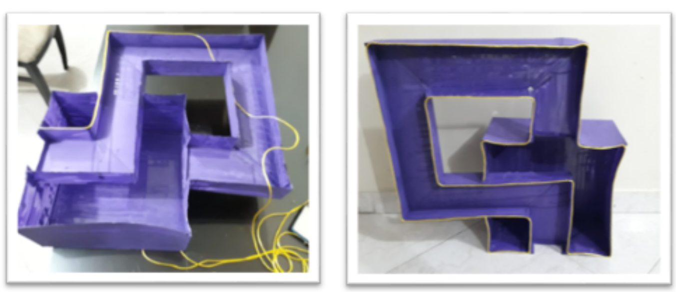

Figura 6.46: Cubriendo los aparentes bordes de la estructura de acetato.

Se hace inmediato ver de la figura que este cuerpo se comporta como la Cinta de Mobius, pues vemos que la totalidad de sus superficie ha sido cubierta con el color violeta que escogimos para pintarla (una sola cara). Además se ve con claridad, que los aparentes bordes que esta describe en su estructura, en realidad se comportan como uno solo, pues logramos cubrirlos en su totalidad realizando un único recorrido a través de ellos utilizando hilo de color amarillo. Por tal razón esta estructura posee un un solo borde, y a la ves si realizáramos el proceso descrito con anterioridad para verificar que esta estructura es no orientable, el proceso ocurriría de igual manera (proceso análogo al de las fechas que indicaban direcciones contrarias para sus contra-caras). Por tal razón se hace evidente que esta estructura es una Bandas de Mobius, y en consecuencia, la forma utilizada para representar la Botella de Klein que se expone en el libro *"topología desde la infancia"*, es correcta. Así pues, luego de hacer evidente que la botella construida en acetato se comporta como una representación de la Botella de Klein, con toda seguridad podemos concluir que la Botella de Klein es un objeto que no distingue interioridad ni exterioridad.

Así pues hemos verificado a través de la implementación de materiales y proyecciones de software las propiedades básicas que describe este maravillosos cuerpo geométrico que recibe el nombre de Botella de Klein, claro está que para esto, fue totalmente necesario utilizar diversas representaciones de esta para llevar a cabo la ejecución de los objetivos que inicialmente trazamos para nuestro trabajo.

Capítulo 7

CONCLUSIONES

- Siendo la Botella de Klein una estructura que se genera producto del encamamiento de la Cinta de Mobius donde la intersección de su propia superficie no ocurre, existe la necesidad de someter a estudio diferentes representaciones de esta, para comprender la naturaleza de la misma.

- La estructura geométrica que habitualmente se conoce como botella de Klein, en realidad no es tal objeto, pues dicha estructura es simplemente una representación que utilizamos en el espacio de tres dimensiones, que nos permite acoger una idea del comportamiento de la misma.

- Una botella de Klein es una estructura matemática que escapa de nuestra visualización, pues para generar dicho cuerpo existe la necesidad de aumentar una nueva dimensión que haga de su estructura, una variedad que trasciende a un espacio mayor al tridimensional, consecuencia del encamamiento que genera la Cinta de Mobius.

- El uso adecuado de recursos pedagógicos tales como material didáctico y software, son una buena estrategia para estudiar los comportamientos de figuras geométricas que poseen una estructura similar a la botella de Klein, como lo puede ser por ejemplo, una cinta de Mobius.

Bibliografía

[1] Baena, J., Mesa F. y Correa G. (2010). *Topología desde la infancia*. Colombia, Pereira: Editorial Correa Vélez Germán.

[2] Díaz, F. y García Calcines, J. (2005). *Curso de Topología General*. Madrid: Editorial Visión Libros.

[3] Franzoni, G (2012, septiembre). *The Klein Bottle: Variations on a Theme*. The American Mathematical Society. Recuperado el 16 de septiembre de 2016, de http://www.ams.org/notices/201208/rtx120801076p.pdf

[4] Granados, A. Grau de la Herrán, y Núñez Valdez, J. (2007). *La banda de Mobius: Un camino que te llevará de cabeza*. *SUMA*, (54), 15-22.

[5] Lipschutz, S. (1970). *Serie de compendios Schaum Teoría y problemas de Topología General*. México: Editorial Mc Graw-Hill.

[6] Machado Standler, M. (2015). *La Botella de Klein: geometría "palindrómica"*. Cultura Cientifica.

[7] Margalef Roig, J. y Outerelo Domínguez, E. (1993). *Introducción a la topología*. Madrid, España: Editorial Complutense, S.A.

[8] Munkres, J. (2002). *Topología*. (2da. Ed.). Madrid, España: Editorial Pearson Educación.

[9] Sakalli, I. (Productor) y Weixelbaum, K. (Productor). (2010). *The Adventures of the Klein Bottle* [Pelicula]. Berlin: Studio of the Department of Mathematics and Computer Science.

[10] Stoll, C. (Director) Haran, B. (Productor). *Cutting a Klein Bottle in Half*. [Pelicula]. California: Studio Mathematical Sciences Research Institute.

[11] Stoll, C. (Director), Haran, B. (Productor). *Klein Bottles*. [Pelicula]. California: Studio Mathematical Sciences Research Institute.

[12] Timm, A. (Director), Prof. Dr. H. Graf v. Bothmer (Director), Tiessen, D., Wittmann, V. y Kenig, I. (Productores). (2004). *Topology, fundamental group, Gluing a torus*. [Pelicula]. Alemania: Studio of the scientific-educational films Flashback.

[13] Timm, A.(Director) Prof. Dr. H. Graf v. Bothmer (Director), Tiessen, D. (Productor), Wittmann, V. (Productor) y Kenig, I. (Productor). (2004). *Topology , fundamental group, Klein is Bottle* [Pelicula]. Alemania: Studio of the scientific-educational films Flashback.